

有限域 $\mathbb{F}_{2^q}$ 上多元 LDPC 码的高效 ADMM 译码算法

郭晓蒙¹, 张涛², 王勇超¹

(1. 西安电子科技大学通信工程学院, 西安, 710071; 2. 天津航计算技术研究所, 天津, 300308)

摘要 针对高速航空通信场景中的衰落和干扰使得传输数据易错误或丢失这一问题, 提出一种在伽罗华域 $\mathbb{F}_{2^q}$ 上的多元低密度奇偶校验(LDPC)码的交替方向乘法(ADMM)译码器。首先, 利用提出的比特嵌入技术, 将多元 LDPC 码等价转化为二元 LDPC 码, 并基于此将多元最大似然(ML)译码问题转化为实空间中的线性整数规划问题。其次, 将整数约束问题松弛为连续约束问题, 为目标函数添加非凸二次惩罚项, 并定制了一种高效的 ADMM 算法来求解译码模型, 其中所有变量都可以并行求解。最后, 证明了提出的 ADMM 译码器满足重要的码字独立特性, 且每次 ADMM 迭代中的计算复杂度约为 $\mathcal{O}(nq)$ 。实验结果表明提出的译码器的纠错能力和译码效率优于其他译码器。

关键词 多元 LDPC; 伽罗华域 $\mathbb{F}_{2^q}$; 比特嵌入; 交替方向乘法(ADMM)

DOI 10.3969/j.issn.2097-1915.2025.03.002

中图分类号 TN919.3+2 **文献标志码** A **文章编号** 2097-1915(2025)03-0009-09

An Efficient ADMM Decoder for Non-Binary LDPC Codes in $\mathbb{F}_{2^q}$

GUO Xiaomeng¹, ZHANG Tao², WANG Yongchao¹

(1. School of Telecommunication Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China;

2. Tianjin Jinhang Institute of Computing Technologies, Tianjin 300308, China)

Abstract Aimed at the problems that transmission data is liable to make mistakes or to lose caused by fading and interference in high-speed aviation communication scenario, a new alternating direction method of multipliers decoder for non-binary low-density parity-check codes in Galois fields $\mathbb{F}_{2^q}$ is proposed. Firstly, a bit embedding rule is proposed, and the procedure of formulating the maximum likelihood decoding problem to a linear integer problem in real space is presented. Secondly, after relaxing the integer problem to a continuous one, an efficient ADMM algorithm is customized to solve the latter, where all the entries of the variable vectors can be obtained in parallel. Thirdly, it is important that the proposed ADMM decoder satisfies the needs of favorable codeword-independent property under some mild conditions and its computation complexity in each ADMM iteration is roughly $\mathcal{O}(nq)$. The simulation results show that this ADMM decoder is prior to the others in error-correction and decoding efficiency.

Key words non-binary low-density parity-check (LDPC) codes; Galois Fields of characteristic two; bit embedding; alternating direction method of multipliers (ADMM)

收稿日期: 2024-03-28

基金项目: 国家自然科学基金(62271371, 62201425); 陕西省重点研发计划(2020ZDLGY15-01)

作者简介: 郭晓蒙(1992—), 女, 陕西西安人, 博士生, 研究方向为信道编译码、非凸优化。E-mail: xmguo@stu.xidian.edu.cn

通信作者: 王勇超(1975—), 男, 河北衡水人, 教授, 研究方向为优化方法在无线通信中的应用。E-mail: ychwang@mail.xidian.edu.cn

引用格式: 郭晓蒙, 张涛, 王勇超. 有限域 $\mathbb{F}_{2^q}$ 上多元 LDPC 码的高效 ADMM 译码算法[J]. 空军工程大学学报, 2025, 26(3): 9-17. GUO Xiaomeng, ZHANG Tao, WANG Yongchao. An Efficient ADMM Decoder for Non-Binary LDPC Codes in $\mathbb{F}_{2^q}$ [J]. Journal of Air Force Engineering University, 2025, 26(3): 9-17.

伽罗华域 $\mathbb{F}_{2^q}$ 中的多元低密度奇偶校验(low-density parity-check, LDPC)码^[1]在高阶调制下具有较高的数据传输速率和频谱效率^[2],并可以抵抗信道突发错误^[3],因此在高速航空通信系统中尤为受青睐。通常,BP算法可以用来译码多元LDPC码。然而基于BP的译码算法都是启发式的,无法从数学理论角度进行分析,并且在高信噪比区域具有误码平台。

近年来,数学规划(mathematical programming, MP)方法,如线性规划(linear programming, LP),被广泛用于LDPC译码。Feldman首次提出了LDPC码的MP译码器^[4]。因其可以从数学理论角度分析收敛性和码字独立性等性能,LP译码方法接受到关注。但通用的LP求解算法仍面临着计算复杂度太高的挑战。为了解决这个问题,研究人员提出了不同的算法以降低二元LDPC码的LP译码复杂度。Barman等^[5]首次将交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)引入到LP译码问题中。与BP译码器相比,这种基于ADMM的译码算法的复杂度大大降低,然而,每次迭代中投影到奇偶多面体上这个操作仍然较为复杂。因此一种线段投影算法^[6]和近似欧氏投影算法^[7]被提出来,用以进一步简化ADMM译码算法中的投影操作。此外,白晶等^[8]利用三变量奇偶校验方程分解技巧构建了有效的ADMM译码器,避免了复杂的投影操作。除此之外,许多工作集中在低信噪比(SNR)区域的纠错性能上。一系列生成割平面的算法^[9-11]被提出来以减少不想要的伪码字,从而提高LP译码器的纠错性能。Liu等^[12]和Bai等^[13]还提出了不同的基于ADMM的变量节点惩罚译码器。Guo等^[14]提出了不同变量节点带有不同惩罚项的ADMM译码器。Wei等^[15]提出了基于ADMM的校验节点惩罚译码器。这些惩罚译码器都在LP译码模型的目标函数中添加了一个非凸惩罚项,从而提高了低SNR区域的纠错性能,且不受BP译码器的误差平台影响。

LP技术不仅在二元LDPC译码上得到了广泛应用,还被拓展到了多元LDPC码中。Flanagan等^[16]首次将LP技术引入到多元LDPC译码中,其提出的嵌入方法,可以将伽罗华域 $\mathbb{F}_{2^q}$ 中的元素映射为实空间中的二元向量。但多元LP译码也面临复杂度问题。为了解决这个问题,坐标上升(coordinate ascent)法被用来解决原始LP问题的对偶问题^[17-18]。与此同时,Honda等^[19]还提出了一种新的用二元向量表示 $\mathbb{F}_{2^q}$ 中元素的恒重(CW)嵌入方法。Liu等^[20]针对 $\mathbb{F}_{2^q}$ 上的多元LDPC码提出了2种基

于ADMM的译码算法,其中每次迭代都包含投影到高维单纯形多面体上的操作。为了降低ADMM译码的复杂度,Wang等^[21]提出了2种针对多元LDPC码的近邻ADMM译码器,通过引入更多辅助变量来避免原本的欧氏空间投影操作。根据以上工作可知,使用LP技术对伽罗华域中的多元LDPC码进行译码的关键步骤是使用嵌入技术,将伽罗华域中的元素表示为实空间中的元素^[22]。现阶段,有Flanagan嵌入和恒重嵌入2种技术,分别可以将 $\mathbb{F}_{2^q}$ 中的元素逐一映射到实空间中长度为 2^q-1 和长度为 2^q 的二元向量。随着伽罗华域的元素 q 增长,2种嵌入方式下译码算法的复杂度将呈指数级增长,非常不利于算法的硬件实现。

为了解决上述ADMM译码算法面临的复杂度问题,本文提出了一种新的嵌入方式——比特嵌入(bit embedding, BE),可以将 $\mathbb{F}_{2^q}$ 中的元素映射到实空间中长度为 q 的二元向量,基于此提出了新的针对多元LDPC码的ADMM译码器。并通过仿真验证所提译码器的性能。

1 最大似然译码问题建模和等价整数线性规划模型

1.1 嵌入有限域元素

多元LDPC码的LP译码中一个关键是建立有限域与欧几里得空间之间的联系。不同于已有技术,本文考虑一种新的嵌入方法,即比特嵌入,它可以将码字 $\mathbf{c}$ 中的符号 $c_i \in \mathbb{F}_{2^q}$ 嵌入到 q 维实空间中。

定义1 比特嵌入。对 $c_i \in \mathbb{F}_{2^q}$ 定义一个映射 $f: \mathbb{F}_{2^q} \mapsto \{0, 1\}^q$,可表示为:

$$f(c_i) = \mathbf{x}_i = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,t}, \dots, x_{i,q}]^T \quad (1)$$

式中: $x_{i,t}$ 为 $c_i \in \mathbb{F}_{2^q}$ 的多项式表达的系数,即 $p(2) =$

$$\sum_{t=1}^q 2^{q-t} x_{i,t}。$$

1.2 最大似然译码问题

考虑一个多元LDPC码字,其校验矩阵为 $\mathbf{H} \in F_{2^q}^{m \times n}$,则可行码字集合 $\mathcal{C}$ 表示为:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{c} \mid \mathbf{h}_j^T \mathbf{c} = 0, j \in \mathcal{J}, \mathbf{c} \in \mathbb{F}_{2^q}^n\} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{h}_j^T, j \in \mathcal{J} = \{1, 2, \dots, m\}$ 为校验矩阵 $\mathbf{H}$ 的第 j 个行向量。

假设码字 $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ 经过加性高斯白噪声(additive gaussian white noise, AWGN)信道且输出为 $\mathbf{r}$ 。在接收端,假设码字符号等概率发送,则最大似然(maximum likelihood, ML)译码的目标为在码字集合 $\mathcal{C}$ 中选择具有最大先验概率($\mathbf{r} \mid \mathbf{c}$)的码字。因此ML译码问题可以表示为:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{c}} \quad & p(\mathbf{r} | \mathbf{c}) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{H}_j^T \mathbf{c} = \mathbf{0}, j \in \mathcal{J}, \mathbf{c} \in \mathbb{F}_{2^q}^n \end{aligned} \quad (3)$$

根据定义1,将 ML 译码问题式(3)转化为实空间上的译码模型。

首先可以观察到,任意码字 $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$ 可以映射为二元向量 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1; \dots; \mathbf{x}_n] \in \{0, 1\}^{nq}$, 则称 $\mathbf{x}$ 为多元码字 $\mathbf{c}$ 的等价二数码字。

其次,针对元素 $h_{j,i} \in \mathbb{F}_{2^q}^T$ 定义一个长为 q 的向量 $\hat{\mathbf{h}}_{j,i} = h_{j,i} [2^{q-1}, 2^{q-2}, \dots, 1]$, 其中乘法运算在 $\mathbb{F}_{2^q}$ 上。将 $\hat{\mathbf{h}}_{j,i}$ 内的每个元素根据比特嵌入规则映射为一个列向量,并将这些列向量按行排列成一个 $q \times q$ 矩阵,记为 $\hat{\mathbf{H}}_{j,i} \in \{0, 1\}^{q \times q}$ 。

对式(3)中校验方程中的分量 $h_{j,i} c_i$, 用比特嵌入表示 $c_i, i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$, 则可获得如下等式:

$$h_{j,i} c_i = h_{j,i} [2^{q-1}, 2^{q-2}, \dots, 1] f(c_i) = \hat{\mathbf{h}}_{j,i}^{(j,i)} \mathbf{x}_i \quad (4)$$

式中: $\hat{\mathbf{h}}_{j,i}^{(j,i)} = [\hat{h}_{1,i}^{(j,i)}, \hat{h}_{2,i}^{(j,i)}, \dots, \hat{h}_{q,i}^{(j,i)}] = [2^{q-1} h_{j,i}, 2^{q-2} h_{j,i}, \dots, h_{j,i}]$, 且所有的乘法运算在 $\mathbb{F}_{2^q}$ 上。接着用比特嵌入表示 $\hat{\mathbf{h}}_{j,i}^{(j,i)}$ 中的所有元素,可以得到:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_{j,i}^{(j,i)} &= [2^{q-1}, 2^{q-2}, \dots, 1] \cdot [f(\hat{h}_{1,i}^{(j,i)}), f(\hat{h}_{2,i}^{(j,i)}), \dots, \\ &f(\hat{h}_{q,i}^{(j,i)})] = [2^{q-1}, 2^{q-2}, \dots, 1] \hat{\mathbf{H}}_{j,i} \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $\hat{\mathbf{H}}_{j,i} = [f(\hat{h}_{1,i}^{(j,i)}), f(\hat{h}_{2,i}^{(j,i)}), \dots, f(\hat{h}_{q,i}^{(j,i)})]$ 。

结合式(4)和式(5),可以获得:

$$h_{j,i} c_i = [2^{q-1}, 2^{q-2}, \dots, 1] \hat{\mathbf{H}}_{j,i} \mathbf{x}_i \quad (6)$$

根据比特嵌入的定义,可以判断出 $\hat{\mathbf{H}}_{j,i} \mathbf{x}_i$ 为 $h_{j,i} c_i$ 的等价二数码字。则模型式(3)中的奇偶校验约束可以等价转换为在 $\mathbb{F}_2$ 上的奇偶校验方程:

$$\hat{\mathbf{H}}_{j,1} \mathbf{x}_1 + \hat{\mathbf{H}}_{j,2} \mathbf{x}_2 + \dots + \hat{\mathbf{H}}_{j,n} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}, j \in \mathcal{J} \quad (7)$$

令 $\hat{\mathbf{H}}_j = [\hat{\mathbf{H}}_{j,1}, \hat{\mathbf{H}}_{j,2}, \dots, \hat{\mathbf{H}}_{j,n}] \in \{0, 1\}^{q \times nq}$, 则式(7)等价于:

$$\hat{\mathbf{H}}_j \mathbf{x} = \mathbf{0}, j \in \mathcal{J} \quad (8)$$

最后,令 $\mathcal{X}$ 表示包含所有 $\mathcal{C}$ 的等价二数码字的集合。则多元 ML 译码问题式(3)可转化为二元 ML 问题:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (9)$$

注意:译码模型式(9)中的约束与式(8)等价。

1.3 整数线性规划译码问题

引理1 如果编码符号经过 BPSK 或 QPSK 调制,然后经过无记忆 AWGN 信道,则式(9)可改写为:

$$\operatorname{argmax}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} p(\mathbf{r} | \mathbf{x}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^q \gamma_{i,t} x_{i,t} \quad (10)$$

式中: $\gamma_{i,t} = \log \frac{p(r_i | x_{i,t} = 0)}{p(r_i | x_{i,t} = 1)}$ 。

上述引理1的证明参考文献[12]。定义 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{1,q}, \dots, \gamma_{n,1}, \gamma_{n,2}, \dots, \gamma_{n,q}]^T \in \mathbb{R}^{nq}$,

则式(10)中的 $\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^q \gamma_{i,t} x_{i,t}$ 可以写为 $\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x}$ 。同时用式(8)替代问题式(9)中的约束,则 ML 译码问题式(9)可以改写为如下的整数规划:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \hat{\mathbf{H}}_j \mathbf{x} = \mathbf{0}, j \in \mathcal{J}, \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{nq} \end{aligned} \quad (11)$$

根据文献[19]中的分解技巧,通过引入辅助变量 $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^{\Gamma_a}$, 将式(11)中的多变量奇偶校验约束分解为一系列的三变量奇偶校验方程。其中 Γ_a 为引入的辅助变量的个数。令 $\mathbf{v} = [\mathbf{x}; \mathbf{u}] \in \{0, 1\}^{nq + \Gamma_a}$, 则三变量奇偶校验方程可以等价转换为不等式组 $\mathbf{TQ}_\tau \mathbf{v} \leq \mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{Q}_\tau$ 为变量选择矩阵, $\tau = 1, 2, \dots, \Gamma_c, \Gamma_c$ 为所有三变量奇偶校验方程的个数, $\mathbf{w} = [0, 0, 0, 2]^T$, $\mathbf{T} = [1, -1, 1; -1, 1, -1; -1, -1, 1; 1, 1, 1]$ 。接下来将多个三变量奇偶校验方程对应的多个不等式组排列成矩阵形式,首先定义 $\mathbf{b} = \mathbf{1}_{\Gamma_c} \otimes \mathbf{w}$ 以及 $\mathbf{A} = [\mathbf{TQ}_1; \dots; \mathbf{TQ}_{\Gamma_c}] \in \{0, \pm 1\}^{4\Gamma_c(nq + \Gamma_a)}$, 其中 $\otimes$ 为克罗内克积,则式(11)中的奇偶校验约束可以等价转化为 $\mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{b}$, 接着定义 $\mathbf{q} = [\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{0}_{\Gamma_a}]^T$ 。

综上,式(11)等价于如下的线性整数规划:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}} \quad & \mathbf{q}^T \mathbf{v} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{b}, \mathbf{v} \in \{0, 1\}^{nq + \Gamma_a} \end{aligned} \quad (12)$$

由于式(12)中离散约束的存在,使得上述译码问题较难求解。接下来本文将模型式(12)转化为一个连续模型,并提出一个有效的算法进行求解。

2 非凸 QP 译码问题和 ADMM 求解算法

2.1 非凸 QP 问题建模

当译码模型式(12)工作在低信噪比区域时,很可能输出分数解。为目标函数中的每个变量节点 $\mathbf{v}$ 添加一个惩罚项,可以有效地抑制分数解。对于离散约束 $\{0, 1\}$, 常规方法是将其松弛为 $\mathbf{v} \in [0, 1]^{nq + \Gamma_a}$, 从而引出以下译码模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}} \quad & \mathbf{q}^T \mathbf{v} - \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v} - 0.5\|_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{b}, \mathbf{v} \in [0, 1]^{nq + \Gamma_a} \end{aligned} \quad (13)$$

受上述模型内在结构的启发,本文提出了一种基于 ADMM 技术的高效求解算法。在该算法中, ADMM 迭代中的每个变量可以用全并行模式解析

求解。同时,每次迭代中的计算复杂度与多元 LD-PC 码的码长和长度 q 线性相关。

2.2 ADMM 算法框架

为模型式(13)中的不等式约束和目标变量 $\mathbf{v}$ 引入辅助变量 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$,则译码问题式(13)等价如下模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{v}} \quad & \mathbf{q}^T \mathbf{v} - \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v} - 0.5\|_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{e}_1 = \mathbf{b}, \mathbf{v} = \mathbf{e}_2 \\ & \mathbf{e}_1 \geq \mathbf{0}_{4\Gamma_c}, \mathbf{e}_2 \in [0, 1]^{nq+\Gamma_a} \end{aligned} \quad (14)$$

其增广拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = & \mathbf{q}^T \mathbf{v} - \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v} - 0.5\|_2^2 + \\ & \mathbf{y}_1^T (\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{b}) + \mathbf{y}_2^T (\mathbf{v} - \mathbf{e}_2) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{e}_1 - \mathbf{b}\|_2^2 + \\ & \frac{\mu}{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{e}_2\|_2^2 \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^{4\Gamma_c}$ 和 $\mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^{nq+\Gamma_a}$ 为拉格朗日乘子; $\mu > 0$ 为预设的惩罚参数。则求解模型式(14)的 ADMM 迭代过程为:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{k+1} = \arg\min_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_\mu(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k, \mathbf{y}_1^k, \mathbf{y}_2^k) \\ \mathbf{e}_1^{k+1} = \arg\min_{\mathbf{e}_1 \geq 0} \mathcal{L}_\mu(\mathbf{v}^{k+1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2^k, \mathbf{y}_1^k, \mathbf{y}_2^k) \\ \mathbf{e}_2^{k+1} = \arg\min_{0 \leq \mathbf{e}_2 \leq 1} \mathcal{L}_\mu(\mathbf{v}^{k+1}, \mathbf{e}_1^{k+1}, \mathbf{e}_2, \mathbf{y}_1^k, \mathbf{y}_2^k) \\ \mathbf{y}_1^{k+1} = \mathbf{y}_1^k + \mu(\mathbf{A}\mathbf{v}^{k+1} + \mathbf{e}_1^{k+1} - \mathbf{b}) \\ \mathbf{y}_2^{k+1} = \mathbf{y}_2^k + \mu(\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{e}_2^{k+1}) \end{cases} \quad (16)$$

1) 求解变量 $\mathbf{v}^{k+1}$ 。由于矩阵 $\mathbf{A}$ 是基于选择矩阵构造的,因此 $\mathbf{A}$ 为列正交矩阵,则 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 为对角矩阵,这意味着 $\mathbf{v}$ 中的所有元素是可分离的。因此 $\mathbf{v}^{k+1}$ 中的 $nq + \Gamma_a$ 个元素可通过并行求解 $nq + \Gamma_a$ 个子问题获得:

$$\begin{aligned} \min_{v_i} \quad & (q_i + y_{2,i}^k + \mu e_{2,i}^k + \frac{1}{2}\alpha + \mathbf{a}_i^T \cdot \\ & (\mathbf{y}_1^k + \mu(\mathbf{e}_1^k - \mathbf{b})))v_i + \frac{1}{2}(\mu s_i - \alpha + \mu)v_i^2 \end{aligned} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{a}_i^T$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行。

令 α 和 μ 满足 $\mu(s_{\min} + 1) > \alpha$, $s_{\min}$ 为向量 $\mathbf{s}$ 中的最小元素, $\mathbf{s} = \text{diag}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = [s_1, s_2, \dots, s_{nq+\Gamma_a}]$ 则问题式(17)变为强凸问题。求问题(17)对 v_i 的一阶偏导数并令其为 0,可求得:

$$v_i^{k+1} = \frac{\mathbf{a}_i^T (\mathbf{b} - \mathbf{e}_1^k - \frac{\mathbf{y}_1^k}{\mu}) + e_{2,i}^k - \frac{y_{2,i}^k}{\mu} - \varphi_i}{\theta_i} \quad (18)$$

式中: $\varphi_i = \frac{2q_i + \alpha}{2\mu}$; $\theta_i = s_i - \frac{\alpha}{\mu} + 1$ 。

2) 求解变量 $\mathbf{e}_1^{k+1}$ 和 $\mathbf{e}_2^{k+1}$ 。显然,目标函数和约束中的变量 $\mathbf{e}_1^{k+1}$ 和 $\mathbf{e}_2^{k+1}$ 中的所有元素都可分离,分别求函数 $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{v}^{k+1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2^k, \mathbf{y}_1^k, \mathbf{y}_2^k)$ 和 $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{v}^{k+1}, \mathbf{e}_1^{k+1}, \mathbf{e}_2, \mathbf{y}_1^k, \mathbf{y}_2^k)$ 对变量 $\mathbf{e}_1^{k+1}$ 和 $\mathbf{e}_2^{k+1}$ 的一阶偏导数,并令其为 0,可得:

$$e_{1,j}^{k+1} = \prod_{[0, +\infty]} \left((b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{v}^{k+1}) - \frac{y_{1,j}^k}{\mu} \right) \quad (19)$$

$$e_{2,i}^{k+1} = \prod_{[0, 1]} \left(v_i^{k+1} + \frac{y_{2,i}^k}{\mu} \right) \quad (20)$$

$\mathbf{y}_1^{k+1}$ 和 $\mathbf{y}_2^{k+1}$ 可通过更新其缩放形式来减少乘法运算。定义 $\tilde{e}_{1,j}^{k+1} = b_j - \mathbf{a}_j^T \mathbf{v}^{k+1} - \frac{y_{1,j}^k}{\mu}$ 和 $\tilde{e}_{2,i}^{k+1} = v_i^{k+1} + \frac{y_{2,i}^k}{\mu}$,则变量 $\mathbf{y}_1^{k+1}$ 和 $\mathbf{y}_2^{k+1}$ 中的每个元素可通过式(21)和式(22)更新:

$$\frac{y_{1,j}^{k+1}}{\mu} = \begin{cases} 0, & \text{if } \tilde{e}_{1,j}^{k+1} \geq 0 \\ -\tilde{e}_{1,j}^{k+1}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

$$\frac{y_{2,i}^{k+1}}{\mu} = \begin{cases} 0, & 1 \geq \tilde{e}_{2,i}^{k+1} > 0 \\ \tilde{e}_{2,i}^{k+1}, & \tilde{e}_{2,i}^{k+1} \leq 0 \\ \tilde{e}_{2,i}^{k+1} - 1, & \tilde{e}_{2,i}^{k+1} \geq 1 \end{cases} \quad (22)$$

本文针对模型式(14)提出的基于比特嵌入 ADMM 译码(BE-ADMM)算法总结如表 1 所示。

表 1 BE-ADM 译码算法

Tab. 1 BE-ADM decoding algorithm

算法 1: BE-ADMM 译码算法

1. 基于奇偶校验矩阵 $\mathbf{H}$ 构建式(8)中的 $\hat{\mathbf{H}}_j, j \in \mathcal{J}$ 。计算式(10)中的对数似然比 γ 。构建 $\mathbf{q}, \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$ 。计算 φ_i 和 θ_i , 令 $\mu(s_{\min} + 1) > \alpha$
2. 初始化 $\{\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ 为全零变量。令 $k = 0$
- Repeat
3. 并行更新式(18)中的 $\{v_i^{k+1} | i = 1, 2, \dots, nq + \Gamma_a\}$
4. 并行更新式(19)中的 $\{e_{1,j}^{k+1} | j = 1, 2, \dots, 4\Gamma_c\}$
5. 并行更新式(20)中的 $\{e_{2,i}^{k+1} | i = 1, 2, \dots, nq + \Gamma_a\}$
6. 并行更新式(21)和式(22)中的 $\frac{y_{1,j}^{k+1}}{\mu}$ 和 $\frac{y_{2,i}^{k+1}}{\mu}$
7. $k = k + 1$
- Until $\|\mathbf{A}\mathbf{v}^k + \mathbf{e}_1^k - \mathbf{b}\|_2^2$ 或者 $\|\mathbf{v}^k - \mathbf{e}_2^k\|$ 的值小于预设参数 ϵ

3 性能分析

3.1 ML 测试

引理 2 如果算法 1 的输出为整数解,则将参数 α 设为 0,并继续做一次迭代。如果新迭代的译码结果与上一次迭代结果相同,则该解为 ML 解。

证明 首先观察模型式(12)和式(13),可以发现式(12)中的离散约束 $\{0,1\}$ 被松弛为式(13)中的 $[0,1]$ 约束后,并不会引入新的可行整数解。这意味着式(13)的整数解必定为一个可行码字。其次,将参数 α 设为 0 后,式(13)变为 LP 译码问题。因为 ADMM 求解 LP 问题可以保证收敛到全局最小值,则算法 1 的输出为式(12)的全局最优解。因此 LP 译码的 ML 特性可以确保算法 1 的输出为 ML 解。

3.2 码字独立特性

本文提出的译码器满足码字独立特性,即全零假设,具体如下所示:

定理 1 基于文献[16]中的信道对称条件,算法 1 失败的概率与发送的码字相独立。

该定理的证明可参考文献[23],不在此展开。

3.3 计算复杂度

本节重点分析本文提出的算法 1 在每次迭代中的复杂度。分析内容只包括乘法运算,因为在硬件应用中,乘法消耗计算资源最多。由于矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有元素为 0、1、-1,因此所有关于 $\mathbf{A}$ 的乘法可以被加法替代。此外, φ_i 和 θ_i 可以在 ADMM 迭代开始前提前计算。

首先考虑 $\mathbf{v}^{k+1}$ 的更新。基于 v_i^{k+1} 在式(15)中的解析解,可以发现更新 $\mathbf{v}^{k+1}$ 需要 $nq + \Gamma_a$ 次乘法。此外,观察式(19)和式(20),可以发现更新 $\mathbf{e}_1^{k+1}$ 和 $\mathbf{e}_2^{k+1}$ 不需要乘法运算。另外,观察式(18)~式(20)中的变量 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{y}_2$,显然它们的缩放形式 $\frac{\mathbf{y}_1}{\mu}$ 和 $\frac{\mathbf{y}_2}{\mu}$ 参与了更新。因此可以得出结论,计算 $\frac{\mathbf{y}_1^{k+1}}{\mu}$ 和 $\frac{\mathbf{y}_2^{k+1}}{\mu}$ 只需要来自式(21)和式(22)的一些加法操作。基于上述分析,算法 1 在每次迭代中的总乘法次数为 $nq + \Gamma_a$ 。

此外,可以发现 $\Gamma_a \leq mq(d-3) = nq(1-R)(d-3)$,其中 R 为码率, d 为校验矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_j$ 中的最大的校验节点度, $j \in \mathcal{J}$ 。因为在 LDPC 码中 $d \ll n$,这意味着 Γ_a 与码长 n 相当。因此可以得出结论,所提出的 ADMM 译码算法在每次迭代中的计算复杂度与多元 LDPC 码长和所考虑的伽罗华域中的 q 线性相关,即 $\mathcal{O}(nq)$ 。此外,值得强调的是 $\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ 中的元素可以以全并行模式更新,非常利于硬件实现。

3.4 收敛性分析

接下来的定理可以显示提出的 BE-ADMM 译码算法的收敛特性。

定理 2 假设 $\mu(s_{\min} + 1) > \alpha$ 成立。令算法 1 迭代生成的序列为 $\{\mathbf{v}^k, \mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k, \mathbf{y}_1^k, \mathbf{y}_2^k\}$ 。如果序列收

敛,即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \{\mathbf{v}^k, \mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k, \mathbf{y}_1^k, \mathbf{y}_2^k\} = (\mathbf{v}^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*)$,则 $(\mathbf{v}^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*)$ 是问题(13)的可行点,此外, $\mathbf{v}^*$ 为问题(13)的静态点,即 $(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)^T \nabla_{\mathbf{v}} g(\mathbf{v}^*) \geq 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}$,其中 $g(\mathbf{v}^*) = \mathbf{q}^T \mathbf{v} - \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v} - 0.5\|_2^2, \mathcal{X} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{b}, \mathbf{v} \in [0,1]^{nq+\Gamma_a}\}$ 。

该定理的证明可参考文献[13]。需要强调的是,定理 2 只解释了在序列收敛的条件下,极限点的质量。到目前为止,分析一般非凸优化问题的 ADMM 求解算法的收敛性,仍然是一个挑战性的问题。然而仿真显示本文提出的 ADMM 算法在仿真中总是收敛的,并且与几种最先进的译码器相比,显示出优异的译码性能。

4 仿真分析

本文考虑的 4 个 LDPC 码字分别为规则 Tanner 码 $(1\ 055, 424)-\mathcal{C}_1^{[24]}$ 、码率 0.4,不规则 PEG 码 $(504, 252)-\mathcal{C}_2^{[25]}$ 、码率 0.5,规则 Tanner 码 $(155, 64)-\mathcal{C}_3^{[24]}$ 、码率 0.41 和规则 WRAN $(480, 400)-\mathcal{C}_4^{[26]}$ 。本文选择这些码字是因为它们具有不同的码长。此外, $\mathcal{C}_1$ 码和 $\mathcal{C}_3$ 码已经在文献[18]中研究过。本文使用 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ 的原始奇偶校验矩阵,特别是对于 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4$,其奇偶校验矩阵的元素被视为 $\mathbb{F}_4$ 中的元素,并通过 QPSK 调制。 $\mathcal{C}_3$ 的奇偶校验矩阵的元素被视为 $\mathbb{F}_{16}$ 中的元素,并通过 BPSK 调制。假设调制符号被发送到 AWGN 信道上进行传输。本文将所提出的 BE-ADMM 译码器与近邻 ADMM 译码器(Proximal-ADMM)^[21]、基于对数域快速傅里叶变换的 Q 元和积算法(Log-FFT-QSPA)^[1]、多元非惩罚 ADMM 译码器(Non-penalized-ADMM)和多元惩罚 ADMM 译码器(Penalized-ADMM)^[20]进行比较。算法 1 的参数设置如下:参数 α 分别设置为 0.9、0.9、0.8 和 0.6,参数 μ 分别设置为 1.1、0.9、1 和 1。使用随机生成的码字作为输入。当 $\|\mathbf{A}\mathbf{v}^k + \mathbf{e}_1^k - \mathbf{b}\|_2^2 \leq 10^{-5}$ 或 $\|\mathbf{v}^k - \mathbf{e}_2^k\|_2^2 \leq 10^{-5}$ 满足或达到最大迭代次数 500 时,停止 ADMM 算法迭代。仿真环境为配备 Intel i7-12700 CPU 和 64G RAM 的计算机上的 MATLAB 2023a/Windows 11。图 1 展示了在不同译码器下 $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_4$ 码字的误帧率(frame error rate, FER)误符号率(symbol error rate, SER)性能。所有数据点都是基于至少 200 个错误帧平均生成的,但由于计算资源有限,每条曲线的最后 2 个点是基于 50 个错误帧生成的。

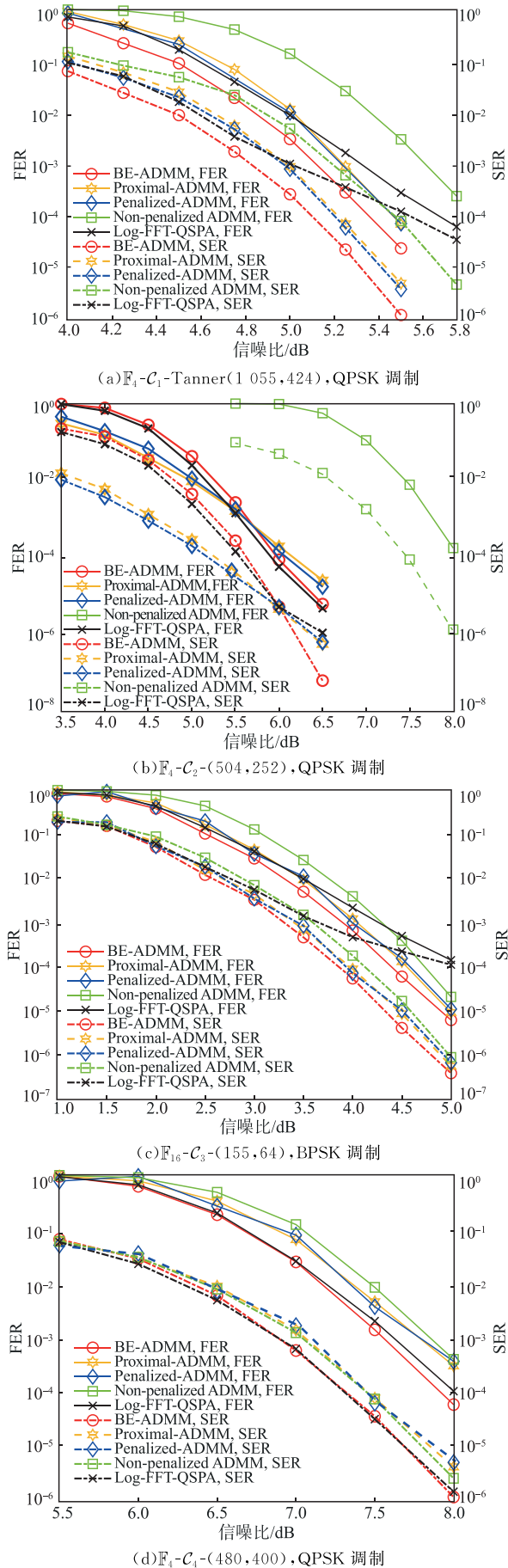


图1 不同 LDPC 码字在不同译码算法下的译码性能对比
Fig. 1 Decoding performance for different LDPC codes under different decoding algorithms

从图 1 可以看出,所提出的 BE-ADMM 译码器比 Proximal-ADMM 译码器和 Penalized-ADMM 译码器具有更好的性能,并且比 Non-penalized-ADMM 译码器有显著改善。特别是对于图 1(a)中码长较长的多元 LDPC 码 C_1 ,所提出的 BE-ADMM 译码器比 Proximal-ADMM 译码器和 Penalized-ADMM 译码器性能提高了约 0.1 dB。此外, BE-ADMM 译码器在图 1(a)中显示出比 Log-FFT-QSPA 译码器更好的纠错性能。在图 1(b)中, BE-ADMM 译码器在低信噪比区域与 Log-FFT-QSPA 译码器性能相似,但在高信噪比区域时 Log-FFT-QSPA 译码器出现了误码平台,此时 BE-ADMM 译码器的 SER 性能提高了约 0.3 dB。同时可以发现 Proximal-ADMM 译码器和 Penalized-ADMM 译码器针对非规则码字 C_2 表现出了更差的瀑布特性,即 BE-ADMM 译码器相比于它们在低信噪比区域性能较差,但在高信噪比区域, BE-ADMM 译码器的性能提升了约 0.2 dB。这说明 BE-ADMM 译码器不受码字是否规则影响,表现出了良好的泛化性。此外需要强调的是 Proximal-ADMM 译码器和 Penalized-ADMM 译码器不满足重要的码字特性——全零假设,这也是导致其在非规则码字上性能较差的原因之一。图 1(c)中, BE-ADMM 译码器在低信噪比区域与其他译码器性能相似,但在高信噪比区域, BE-ADMM 译码器比 Proximal-ADMM 译码器和 Penalized-ADMM 译码器性能提高了约 0.25 dB,且未出现误码平台。图 1(d)中, BE-ADMM 译码器在高信噪比区域, FER 性能比 Proximal-ADMM 译码器和 Penalized-ADMM 译码器性能提高了约 0.2 dB。此外,在该码字下, Log-FFT-QSPA 译码器并没有表现出明显的误码平台,但 BE-ADMM 译码器在高信噪比区域的 FER 性能仍然与 Log-FFT-QSPA 性能提高了约 0.1 dB。值得指出的是,码字 $(480, 400)-C_4$ 与 $(504, 252)-C_2$ 具有相似的码长,但码率完全不同。高码率的码字 C_4 相比于低码率码字 C_2 来说,需要更高的信噪比才能表现出瀑布特性。但在瀑布区间内,本文提出的 BE-ADMM 译码器仍然展现了比其他译码器更优越的纠错性能。

图 2 和图 3 分别为所提出的 BE-ADMM 译码器、Proximal-ADMM 译码器和 Non-penalized-ADMM 译码器对于 4 个码字的平均迭代次数和平均译码时间。

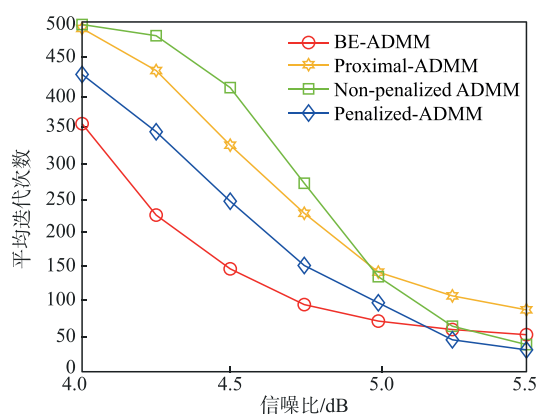
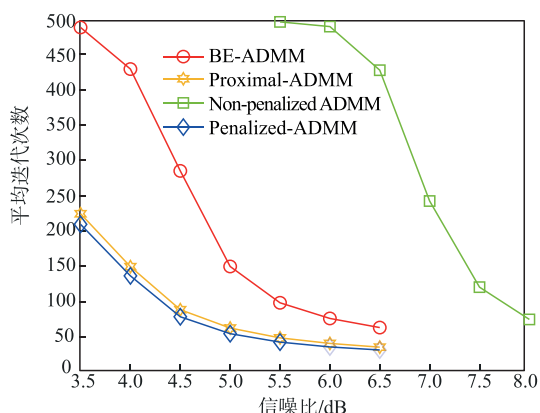
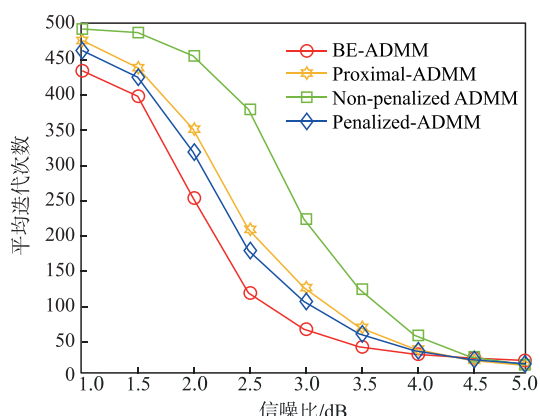
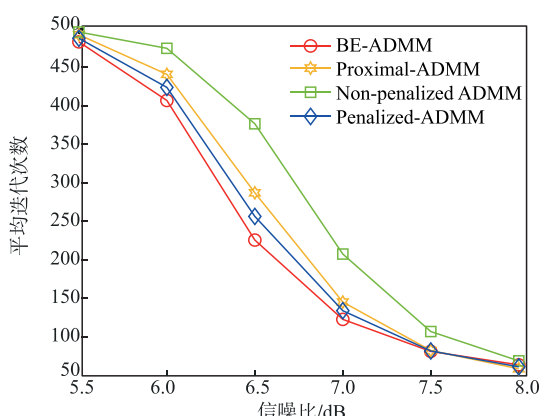
(a) $\mathbb{F}_4$ - $\mathcal{C}_1$ -Tanner(1055,424), QPSK 调制(b) $\mathbb{F}_4$ - $\mathcal{C}_2$ -(504,252), QPSK 调制(c) $\mathbb{F}_{16}$ - $\mathcal{C}_3$ -(155,64), BPSK 调制(d) $\mathbb{F}_4$ - $\mathcal{C}_4$ -(480,400), QPSK 调制

图 2 4 个 LDPC 码字在不同译码算法下的平均迭代次数对比
Fig. 2 Average iteration number for four LDPC codes under different decoding algorithms

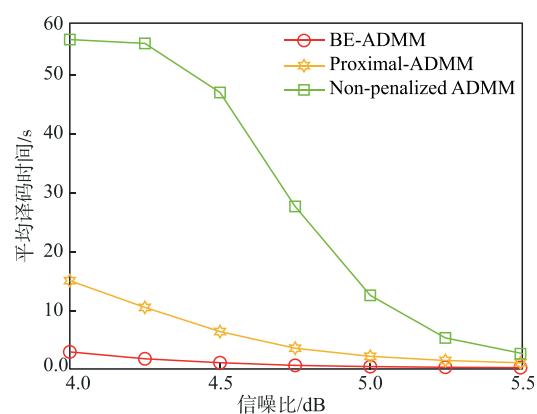
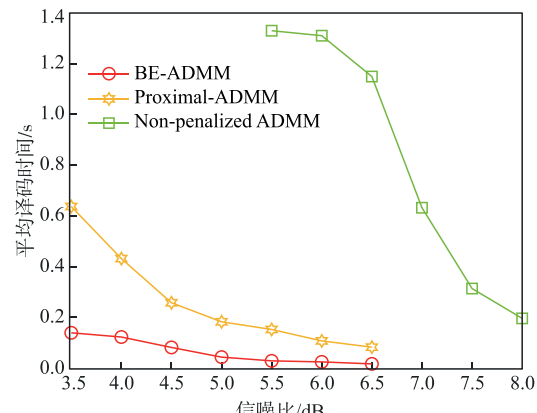
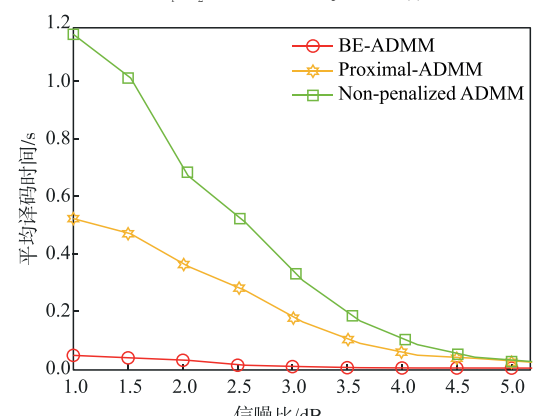
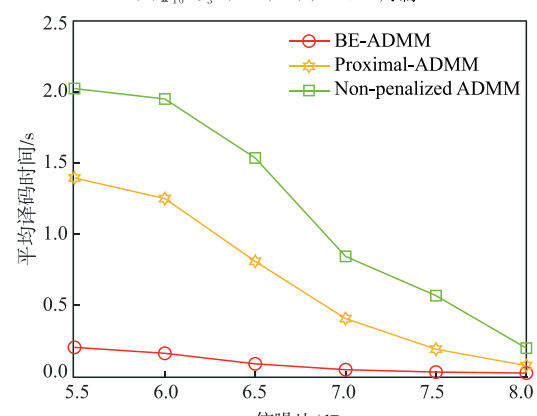
(a) $\mathbb{F}_4$ - $\mathcal{C}_1$ -Tanner(1055,424), QPSK 调制(b) $\mathbb{F}_4$ - $\mathcal{C}_2$ -(504,252), QPSK 调制(c) $\mathbb{F}_{16}$ - $\mathcal{C}_3$ -(155,64), BPSK 调制(d) $\mathbb{F}_4$ - $\mathcal{C}_4$ -(480,400), QPSK 调制

图 3 不同 LDPC 码字在不同译码算法下的平均译码时间
Fig. 3 Average decoding time for different LDPC codes under different decoding algorithms

图 2 和图 3 中的所有数据点都是基于生成 1 000 000 个 LDPC 帧后平均得到的。从图 2 中可以观察到,在高信噪比区域,BE-ADMM 译码器比 Non-penalized-ADMM 译码器的平均迭代次数更多。这是因为与文献[20]中的译码模型相比,本文所提出的译码模型需要更多的辅助变量。此外,与 Proximal-ADMM 译码器相比,BE-ADMM 译码器的平均迭代次数和平均译码时间都更少。这主要是因为本文提出的译码模型需要求解的约束和变量比 Proximal-ADMM 译码器要少得多。

表 2 比较了 BE-ADMM 译码模型与 Proximal-ADMM 译码模型的约束和变量个数,即译码模型中 $\mathbf{A}$ 的行数和列数。显然,BE-ADMM 译码模型具有更少的约束和变量。通常,如果模型包含的约束和变量越少,则需要的迭代次数就越少。图 2 和图 3 中的仿真结果证实了该结论。

表 2 不同译码算法的约束个数和变量个数比较
Tab. 2 Comparisons of constraints under and number of variables different algorithms

码字	CW-Proximal-ADMM ^[21]		BE-ADMM	
	约束个数	变量个数	约束个数	变量个数
C_1	25 109	9 284	15 192	4 642
C_2	19 882	7 048	12 080	3 524
C_3	3 689	1 364	2 232	682
C_4	19 120	7 360	11 520	3 680

5 结语

本文针对多元 LDPC 码提出了一种基于 ADMM 方法和比特嵌入技术的高效译码器。通过比特嵌入方法将有限域上的多元最大似然译码问题转化为二元最大似然译码问题。接着将二元最大似然译码问题松弛为非凸二次规划译码模型,并提出了 ADMM 译码器对其进行求解。该译码器的复杂度与多元 LDPC 码的长度以及所考虑的伽罗华域的大小呈线性相关。此外,所提出的译码算法的性能满足码字独立性。仿真结果表明,无论是在纠错能力还是译码复杂度方面,所提出的译码器的性能展示出了其优越性。本文目前只考虑了高斯信道下的多元 LDPC 码的 ADMM 译码算法。在未来研究工作中,将针对带有衰落特性的航空通信信道展开分析,研究适合于衰落信道的多元 LDPC 码译码算法。

参考文献

[1] William E Ryan,林舒.信道编码:经典与现代[M].白

宝明,马啸,译.北京:电子工业出版社,2017.
RYAN W E, LIN S. Channel Codes: Classical and Modern[M]. BAI B M, MA X, Translated. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2017. (in Chinese)
[2] 杨刚华,何高宁,陈睿荣,等.6G 无线空口传输技术研究进展与展望[J].中国科学:信息科学,2024,54(5): 1078-1113.
YANG G H, HE G N, CHEN R R, et al. Progress and Prospect of 6G Wireless Air-Interface Transmission Technology Research[J]. Scientia Sinica (Informationis), 2024, 54(5): 1078-1113. (in Chinese)
[3] RONG B, JIANG T, LI X M, et al. Combine LDPC Codes over $GF(q)$ with q -Ary Modulations for Bandwidth Efficient Transmission[J]. IEEE Transactions on Broadcasting, 2008, 54(1): 78-84.
[4] FELDMAN J, WAINWRIGHT M J, KARGER D R. Using Linear Programming to Decode Binary Linear Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(3): 954-972.
[5] BARMAN S, LIU X S, DRAPER S, et al. Decomposition Methods for Large Scale LP Decoding[C]//2011 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). Monticello, IL: IEEE, 2011: 253-260.
[6] 张俊伟,郑昱津,刘惠阳,等.基于线段投影的 ADMM-LP 译码算法硬件实现[J].科学技术与工程,2023,23(6): 2469-2476.
ZHANG J W, ZHENG Y J, LIU H Y, et al. Hardware Implementation of ADMM-LP Decoding Algorithm Based on Line Segment Projection Algorithm[J]. Science Technology and Engineering, 2023, 23(6): 2469-2476. (in Chinese)
[7] 王钟斐,赵悦,王彪.低密度校验码 ADMM 译码的 2 种欧几里德投影算法复杂度研究[J].宝鸡文理学院学报(自然科学版),2024,44(2): 1-6.
WANG Z F, ZHAO Y, WANG B. Research on the Complexity of Two Kinds of Euclidean Projection Algorithm of ADMM Decoding for Low-Density Parity-Check Codes[J]. Journal of Baoji University of Arts and Sciences (Natural Science Edition), 2024, 44(2): 1-6. (in Chinese)
[8] 白晶.基于 ADMM 和度分解的 LDPC 码数学规划译码方法研究[D].西安:西安电子科技大学,2020.
BAI J. Research on Mathematical Programming Decoders for LDPC Codes via ADMM and Degree Decomposition[D]. Xi'an: Xidian University, 2020. (in Chinese)
[9] MIWA M, WADAYAMA T, TAKUMI I. A Cutting-Plane Method Based on Redundant Rows for Improving Fractional Distance[J]. IEEE Journal on Selected

- Areas in Communications, 2009, 27(6):1005-1012.
- [10] TANATMIS A, RUZIKA S, HAMACHER H W, et al. A Separation Algorithm for Improved LP-Decoding of Linear Block Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(7):3277-3289.
- [11] ZHANG X J, SIEGEL P H. Adaptive Cut Generation Algorithm for Improved Linear Programming Decoding of Binary Linear Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(10):6581-6594.
- [12] LIU X S, DRAPER S C. The ADMM Penalized Decoder for LDPC Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(6):2966-2984.
- [13] BAI J, WANG Y C, SHI Q J. Efficient QP-ADMM Decoder for Binary LDPC Codes and Its Performance Analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68:503-518.
- [14] GUO X M, CHANG T H, WANG Y C. Model-Driven Deep Learning ADMM Decoder for Irregular Binary LDPC Codes [J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(2):571-575.
- [15] WEI H Y, BANIHASHEMI A H. ADMM Check Node Penalized Decoders for LDPC Codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(6):3528-3540.
- [16] FLANAGAN M F, SKACHEK V, BYRNE E, et al. Linear-Programming Decoding of Nonbinary Linear Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(9):4134-4154.
- [17] GOLDIN D, BURSHTAIN D. Iterative Linear Programming Decoding of Nonbinary LDPC Codes with Linear Complexity[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(1):282-300.
- [18] PUNEKAR M, VONTOBEL P O, FLANAGAN M F. Low-Complexity LP Decoding of Nonbinary Linear Codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61(8):3073-3085.
- [19] HONDA J, YAMAMOTO H. Fast Linear-Programming Decoding of LDPC Codes over $\text{GF}(2^m)$ [C]// 2012 International Symposium on Information Theory and its Applications. Honolulu, HI: IEEE, 2012: 754-758.
- [20] LIU X S, DRAPER S C. ADMM LP Decoding of Non-Binary LDPC Codes in $\mathbb{F}_{2^m}$ [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(6):2985-3010.
- [21] WANG Y C, BAI J. Decoding Nonbinary LDPC Codes via Proximal-ADMM Approach [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2022, 68(9):5730-5746.
- [22] YANG K, WANG X D, FELDMAN J. A New Linear Programming Approach to Decoding Linear Block Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(3):1061-1072.
- [23] GUO X M, WANG Y C. Efficient ADMM Decoder for Non-Binary LDPC Codes with Codeword-Independent Performance[EB/OL]. (2022-02-07) [2024-05-01]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.02961>
- [24] MICHAEL M, SRIDHARA T D, FUJA T E. A Class of Group-Structured LDPC Codes[C]//International Symposium on Information Theory Applications. 2001:365-370.
- [25] MACKAY D J C. Encyclopedia of Sparse Graph Codes [EB/OL]. (2008-8-19) [2024-05-01]. <http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/codes/data.html>.
- [26] HELMLING, M, SCHOLL S, Gensheimer F, et al. Database of Channel Codes and ML Simulation Results[EB/OL]. (2023-01-01) [2024-05-01]. <http://www.uni-kl.de/channel-codes>.

(编辑:徐楠楠)