

不确定重尾量测噪声干扰下的鲁棒目标跟踪算法

马天力, 张 扬, 刘 盼, 高 嵩

(西安工业大学电子信息工程学院, 西安, 710021)

摘要 在大多数目标跟踪方法中, 通常假设量测噪声服从参数已知的高斯分布或对称重尾分布, 但其非常受限并且在实际过程中常常无法得到满足。因此, 针对存在不确定重尾量测噪声干扰下的目标跟踪问题, 提出基于变分推理的鲁棒容积卡尔曼滤波算法。该算法利用 Skew-T 分布对不确定重尾量测噪声进行建模, 在基于容积规则的数值积分过程中, 结合变分推理将 Skew-T 分布量测噪声参数与系统状态变量进行联合递归计算, 通过对近似后验概率密度函数进行变分迭代, 获得系统模型和不对称重尾量测噪声参数。仿真结果表明, 该算法相比变分贝叶斯扩展卡尔曼滤波算法具有较高的滤波精度。

关键词 目标跟踪; 重尾噪声; 变分贝叶斯; 容积卡尔曼滤波; KL 散度

DOI 10.3969/j.issn.2097-1915.2022.06.009

中图分类号 TN953 **文献标志码** A **文章编号** 2097-1915(2022)06-0064-07

A Robust Target Tracking Algorithm under Condition of Uncertain Heavy-Tailed Measurement Noise

MA Tianli, ZHANG Yang, LIU Pan, GAO Song

(College of Electronic Information Engineering, Xi'an Technological University,
Xi'an 710021, China)

Abstract In majority target tracking methods, the measurement noise is generally assumed to be known Gaussian distributed or asymmetric Heavy-tail distributed. However, this assumption is very limited and often does not satisfy the needs of the work in practical application. A variable inference robust cubature Kalman filter is proposed for the nonlinear target tracking with unknown time-varying asymmetric Heavy-tailed noise. The asymmetric Heavy-tailed noise is modeled by Skew-T distribution. In the process of the numerical calculation of cubature Kalman filter, the system state and measurement noise parameter are jointly estimated recursively by the variable inference. The system model and unknown asymmetric heavy tailed measurement noise parameters are obtained by variable iteration of an approximate posterior probability density function. The simulation results show that the proposed algorithm is higher than the variable Bayesian extended Kalman filter algorithm in filtering accuracy.

Key words target tracking; heavy-tailed noise; variational bayesian; cubature Kalman filter; Kullback-Liebler divergence

收稿日期: 2022-06-29

基金项目: 陕西省重点研发计划(2022GY-242); 陕西省技术创新引导专项项目(2022GFY01-16)

作者简介: 马天力(1988-), 男, 陕西咸阳市人, 副教授, 研究方向为多目标跟踪。E-mail: matianli111@126.com

引用格式: 马天力, 张扬, 刘盼, 等. 不确定重尾量测噪声干扰下的鲁棒目标跟踪算法[J]. 空军工程大学学报, 2022, 23(6): 64-70. MA Tianli, ZHANG Yang, LIU Pan, et al. A Robust Target Tracking Algorithm under Condition of Uncertain Heavy-Tailed Measurement Noise [J]. Journal of Air Force Engineering University, 2022, 23(6): 64-70.

目标跟踪是在已知受噪声干扰的量测信息条件下,利用相关滤波算法对目标状态(位置,速度等)进行估计的过程,其在弹道导弹防御、空中目标监控和水中目标探测等领域应用广泛^[1-2]。然而系统的量测数据与目标动态参数间的关系大多为非线性,一般采用点估计和概率密度估计^[3]的方法对此类系统状态进行计算。点估计方法是通过非线性逼近策略输出状态均值和协方差矩阵获得系统状态。根据逼近策略可分为函数逼近、统计量逼近和随机模型逼近;其代表算法分别为扩展卡尔曼滤波^[4]、无迹卡尔曼滤波^[5]和容积卡尔曼滤波(cubature kalman filter, CKF)^[6]。概率密度估计则是通过构建状态的概率密度表达,计算状态后验概率密度函数,并根据后验信息获得系统状态^[7],该方法需要大量状态对后验概率密度函数进行描述,计算量较大,因此,实际系统大多采用点估计器进行状态估计。

一般来说,跟踪系统中量测噪声的统计特性往往是未知且时变的。针对该类问题,文献[8]提出改进 Sage-Husa 自适应 Kalman 滤波算法,运用协方差匹配判据来判断滤波发散趋势,并引入自适应衰减因子修正预测误差协方差,从而调整滤波增益阵,抑制滤波发散。文献[9]提出基于最大后验概率的自适应无迹卡尔曼滤波算法,利用输出的量测信息在线更新噪声均值和协方差。Chang 等^[10]通过 Huber 代价函数重新表述量测噪声,无需对非线性方程进行线性化处理,提高了滤波算法的估计精度。彭美康等^[11]提出基于鲁棒 M 估计的自适应容积卡尔曼滤波算法,通过修正观测向量的误差协方差,将损失函数最小化,在观测噪声污染率较高的情况下能够自适应抑制野值对系统的干扰。Sarkka 等^[12]提出了变分贝叶斯自适应卡尔曼滤波算法,将变分贝叶斯方法与卡尔曼滤波结合,对模型状态和时变量测噪声参数进行联合递归估计,一定程度上降低时变量测噪声方差对系统的影响。虽然上述方法可以有效解决时变量测噪声条件下非线性系统状态估计问题,但均需要满足量测噪声服从高斯分布的假设,具有一定局限性^[13]。

解决时变非高斯噪声条件下的非线性滤波问题主要核心是对非高斯噪声进行描述。Fan 等^[14]运用混合高斯模型对非高斯量测噪声进行表示,利用集成卡尔曼滤波方法估计系统状态;董祥祥等^[15]运用 Pearson Type VII 分布对重尾噪声进行建模,结合鲁棒容积卡尔曼滤波器,实现状态向量、模型参数的联合估计;Zhu 等^[16]利用 Student-T 分布描述非高斯噪声模型,采用变分学习算法对系统模型和噪声参数进行联合估计。在此基础上,Huang 等^[17]将

Student-T 分布加权积分分解为球面积分和径向积分,并利用球面径向变换规则进行积分数值化求解,提出基于 Student-T 分布的随机容积滤波器。然而在实际目标跟踪过程中,受传感器设备老化、故障或电磁干扰等因素影响,导致量测噪声出现不对称重尾性,利用混合高斯模型,Student-T 分布模型难以对量测噪声进行准确表述,不准确的模型描述将严重降低非线性目标跟踪系统的滤波性能。Wang 等^[18]用 Skew-T 模型对非对称量测噪声进行建模,提出基于 Skew-T 分布扩展卡尔曼滤波算法(Skew-T extended kalman filter, SkewEKF),假设噪声参数已知,一旦先验噪声信息与实际值存在较大偏差,难以保证准确的滤波效果。

因此,本文针对不确定重尾量测噪声条件下非线性系统状态估计问题,提出基于变分推理的鲁棒容积卡尔曼滤波(variational inference robust cubature kalman filter, VIRCKF)算法,该方法运用 Skew-T 分布对不对称重尾噪声进行表示,然后基于三阶球面径向规则计算状态和量测的容积点,并通过采样所得的容积点逼近系统状态和协方差,同时结合变分推理学习估计得到近似后验分布,并对系统状态进行更新,从而获得准确的目标状态。

1 问题描述

考虑不对称重尾量测噪声下的目标跟踪问题,建立系统模型:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_k \quad (2)$$

式中: \mathbf{x}_k 为 k 时刻系统状态向量; \mathbf{A} 为状态转移矩阵; \mathbf{w}_{k-1} 为过程噪声,假设其服从零均值、协方差为 \mathbf{Q}_{k-1} 的高斯分布; $h(\cdot)$ 为量测方程; \mathbf{z}_k 是 k 时刻的传感器接收到的量测值; \mathbf{e}_k 为不对称重尾量测噪声,且 $\text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{e}_k) = 0$ 。

$$\mathbf{e}_k : \prod S_T([\mathbf{e}_k]_i; \mu, \sigma_{ii}^2, \delta_{ii}, \nu_i) \quad (3)$$

式中: $S_T(\cdot)$ 表示 Skew-T 分布; $[\mathbf{e}_k]_i$ 表示 k 时刻噪声的第 i 个元素; μ, σ 和 δ 分别是位置参数,扩展参数和模型偏斜系数, ν 表示自由度, $\sigma, \delta, \nu > 0$ 。

以一维 Skew-T 分布为例,当 $i=1$ 时,式(3)可表示为^[19]:

$$S_T(e; \mu, \sigma^2, \delta, \nu) = 2t(e; \mu, \delta^2 + \sigma^2, \nu)T(\bar{e}; 0, 1, \nu+1) \quad (4)$$

且

$$t(e; \mu, \sigma^2, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sigma \sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{(e-\mu)^2}{\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (5)$$

$$\tilde{e} = \frac{(e - \mu)\delta}{\sigma} \left(\frac{v+1}{v(\delta^2 + \sigma^2) + (e - \mu)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

式中: $t(\cdot; \mu, \sigma^2, v)$ 为 Student-T 分布的概率密度函数; $T(\cdot; 0, 1, v)$ 是 Student-T 分布的累积分布函数; $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。

Skew-T 分布、Student-T 分布和高斯分布的概率密度函数如图 1 所示。当 δ 趋于 0 时, Skew-T 分布接近 Student-T 分布; 当 δ 趋于 0 且 v 趋于 ∞ 时, Skew-T 分布接近正态分布。由图 1 可以看出, Skew-T 分布偏斜更明显, 更适合对不对称重尾噪声进行模拟。

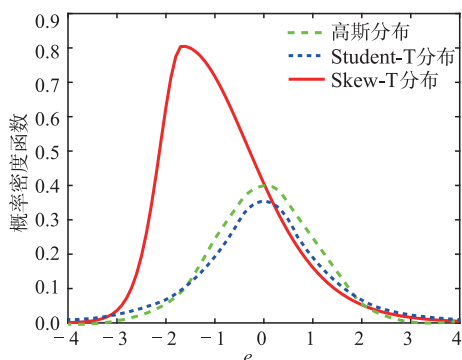


图 1 3 种分布的概率密度函数

2 基于变分推理的鲁棒容积卡尔曼滤波器

2.1 变分推断

假设系统状态向量先验服从高斯分布, 则式(1)表示为 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k|k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{A}\mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{Q}_{k-1})$, 系统一步预测的概率密度函数 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$ 为:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (7)$$

结合式(2)和(3)得到量测似然函数:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) : S_T(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{v}) \quad (8)$$

式中: $\mathbf{R} = \text{diag}(\sigma_{ii}^2)$ 为尺度参数协方差矩阵; $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(\delta_{ii})$ 为偏斜度矩阵; \mathbf{v} 为自由度矢量矩阵, 且 $i = 1, 2, \dots, m$ 。

由于式(8)中似然函数为 Skew-T 分布, 其不满足贝叶斯推断中参数属于共轭指数分布簇的假设条件^[20], 造成参数难以进行求解。因此, 将式(8)的似然函数表示为:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k) : N(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{\Delta}\mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k^{-1}\mathbf{R}) \quad (9)$$

$$p(\mathbf{u}_k | \mathbf{\Lambda}_k) : N_H(\mathbf{u}_k; \mathbf{0}, \mathbf{\Lambda}_k^{-1}) \quad (10)$$

$$p(\mathbf{\Lambda}_k) : G(\mathbf{\Lambda}_k; \frac{\mathbf{v}}{2}, \frac{\mathbf{v}}{2}) \quad (11)$$

式中: $N_H(\cdot)$ 为半正态分布, $G(\cdot)$ 为伽马分布。

根据贝叶斯规则^[21], 参数集合的后验概率密度函数计算为:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k)}{p(\mathbf{z}_{1:k})} \quad (12)$$

式(12)的难点在于边缘似然函数 $p(\mathbf{z}_{1:k})$ 的计算, 故引入变分贝叶斯理论, 考虑寻找一个简单近似分布 $q(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k)$ 去逼近真实后验分布 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k})$, 取 $p(\mathbf{z}_{1:k})$ 的对数形式:

$$\ln p(\mathbf{z}_{1:k}) = \ln \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k, \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k})} = F(q(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k)) + \text{KL}(q(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k) \| p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k})) \quad (13)$$

$\text{KL}(q(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k) \| p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k}))$ 为 KL 散度, 其用来衡量近似分布 $q(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k)$ 与真实后验分布 $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ 之间的差异^[22], 由于 KL 散度非负, 只需令变分下界 $F(q(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k))$ 达到最大, 即可获得后验概率最优近似分布。

系统联合概率密度函数为:

$$L = \prod_{k=1}^N p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \prod_{k=1}^N p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) \cdot \prod_{k=1}^N p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k) \cdot \prod_{k=1}^N p(\mathbf{u}_k | \mathbf{\Lambda}_k) \prod_{k=1}^N p(\mathbf{\Lambda}_k) \quad (14)$$

根据均值域逼近理论^[23], 后验概率密度函数的近似因子分解形式为:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx q_x(\mathbf{x}_k) q_u(\mathbf{u}_k) q_{\Lambda}(\mathbf{\Lambda}_k) \quad (15)$$

2.2 变分贝叶斯容积卡尔曼滤波

非线性滤波问题可以归结为一个积分计算问题, 被积函数为非线性函数和密度乘积的形式。容积卡尔曼滤波算法是将积分转换为球面径向形式, 采用球面径向规则进行数值积分。由于包含 Skew-T 分布的后验概率密度函数形式复杂, 考虑将变分推断引入 CKF 算法。在状态预测阶段, 因状态向量服从高斯分布, 可用三阶球面径向规则计算标准的高斯加权积分, 即通过一组容积点数值化计算系统的状态均值和协方差。

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{S}_{k-1|k-1}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{g}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \mathbf{x}_{k-1|k-1} \quad (17)$$

式中: $\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{\frac{l}{2}} [\mathbf{1}]_i$ 为容积点集, $2n$ 为容积点总个数,

$$[\mathbf{1}] = \begin{cases} [\mathbf{1}]_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ -[\mathbf{1}]_i, & i = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases}$$

依据式(1)和式(7), 状态向量的先验均值 $\mathbf{x}_{k|k-1}$ 和协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 可表示为:

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k = \int \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} N(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \int \mathbf{x}_{k|k-1} \mathbf{x}_{k|k-1}^T p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (19)$$

对容积点 $\mathbf{g}_{i,k|k-1}$ 进行更新,

$$\mathbf{g}_{i,k|k-1} = \mathbf{A} \mathbf{g}_{i,k-1|k-1} \quad (20)$$

则状态向量先验均值和协方差矩阵可表示为:

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{g}_{i,k|k-1} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{g}_{i,k|k-1} \mathbf{g}_{i,k|k-1}^T - \mathbf{x}_{k|k-1} \mathbf{x}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (22)$$

在量测更新阶段,量测服从 Skew-T 分布,通过变分推断计算其近似形式,用更新的容积点计算系统量测均值和协方差。其量测容积点计算如下:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{S}_{k|k-1}^T \quad (23)$$

$$\mathbf{g}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \mathbf{x}_{k|k-1} \quad (24)$$

结合式(7)和(8),量测向量的先验概率密度 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})$ 为:

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k = \int S_T(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}, \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{v}) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) d\mathbf{x}_k \quad (25)$$

量测向量先验均值 $\mathbf{z}_{k|k-1}$ 和协方差矩阵 $\mathbf{P}_{z,k|k-1}$ 表示为:

$$\mathbf{z}_{k|k-1} = \int \mathbf{z}_k p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{z}_k = \int h(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{z}_k \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_{z,k|k-1} = \int \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k^T p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{z}_k \quad (27)$$

状态向量和量测的互协方差矩阵 $\mathbf{P}_{xz,k|k-1}$ 为:

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \int \int \mathbf{x}_k \mathbf{z}_k^T p(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{z}_k \quad (28)$$

其中:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) = S_T(\mathbf{z}_k; h(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}, \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{v}) N(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad (29)$$

考虑 Skew-T 分布用其近似分布式(9)代替,式(27)~(28)可以表示为式(32)~(33):

$$\mathbf{z}_{i,k|k-1} = h(\mathbf{g}_{i,k|k-1}) \quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{z}_{i,k|k-1} \quad (31)$$

$$\mathbf{P}_{z,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{z}_{i,k|k-1} \mathbf{z}_{i,k|k-1}^T - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^T + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R} \quad (32)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k|k-1} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{g}_{i,k|k-1} \mathbf{z}_{i,k|k-1}^T - \mathbf{x}_{k|k-1} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^T \quad (33)$$

系统状态的后验概率密度函数为:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}) p(\boldsymbol{\Lambda}_k) \cdot p(\mathbf{u}_k | \boldsymbol{\Lambda}_k) p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\Lambda}_k) \quad (34)$$

由于后验概率密度函数形式复杂,根据式(15),

通过求解 $\log q_x(\mathbf{x}_k)$ 、 $\log q_u(\mathbf{u}_k)$ 和 $\log q_{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}_k)$ 可得到系统的状态和协方差,具体计算过程如下:

$$\begin{aligned} \log q_x(\mathbf{x}_k) = & E_{q_u, q_{\Lambda}} [\log p(\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})] + c_x = \\ & -\frac{1}{2} E_{q_u, q_{\Lambda}} [(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k)^T \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k)] - \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1})^T \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1}) + c_x = \\ & -\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k)^T \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_k \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k) - \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1})^T \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k-1}) + c_x \quad (35) \end{aligned}$$

由于变分贝叶斯近似适用于所有共轭指数域中的分布函数,那么后验可由其先验唯一确定^[24],所以其后验概率密度函数的形式为:

$$q_x(\mathbf{x}_k) = N(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}) \quad (36)$$

式中:更新后的卡尔曼滤波增益 \mathbf{K}_k 、系统状态 $\mathbf{x}_{k|k}$ 和协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}$ 分别为:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xz,k|k-1} \mathbf{P}_{z,k|k-1}^{-1} \quad (37)$$

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} - \boldsymbol{\Delta} \bar{\mathbf{u}}_k) \quad (38)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{z,k|k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (39)$$

同理,对于隐变量 \mathbf{u}_k ,有:

$$\begin{aligned} \log q_u(\mathbf{u}_k) = & E_{q_x, q_{\Lambda}} [\log p(\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})] + c_u = \\ & -\frac{1}{2} E_{q_x, q_{\Lambda}} [(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k)^T \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{R}^{-1} \cdot \\ & (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k)] - \frac{1}{2} E_{q_{\Lambda}} [\mathbf{u}_k^T \boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{u}_k] + c_u = \\ & -\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - h(\bar{\mathbf{x}}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k)^T \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_k \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - h(\bar{\mathbf{x}}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k) - \\ & \frac{1}{2} \mathbf{u}_k^T \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_k \mathbf{u}_k + c_u \quad (40) \end{aligned}$$

其后验概率密度函数的形式为:

$$q_u(\mathbf{u}_k) = N_T(\mathbf{u}_k; \mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{U}_{k|k}) \quad (41)$$

式中: $N_T(\cdot)$ 表示截断正态分布。 $q_u(\mathbf{u}_k)$ 的后验概率密度参数的更新方程为:

$$\mathbf{u}_{k|k} = \mathbf{K}_u (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{k|k})) \quad (42)$$

$$\mathbf{U}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_u \boldsymbol{\Delta}) \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_k^{-1} \quad (43)$$

$$\mathbf{K}_u = \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_k^{-1} \boldsymbol{\Delta} (\boldsymbol{\Delta} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_k^{-1} + \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_k^{-1} \mathbf{R})^{-1} = \boldsymbol{\Delta} (\boldsymbol{\Delta}^2 + \mathbf{R})^{-1} \quad (44)$$

对于似然函数参数 $\boldsymbol{\Lambda}_k$,有:

$$\begin{aligned} \log q_{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}_k) = & E_{q_x, q_u} [\log p(\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\Lambda}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})] + c_{\Lambda} = \\ & -\frac{1}{2} E_{q_x, q_u} [\text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k) \cdot \\ & (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}_k)^T)] - \frac{1}{2} E_{q_u} [\text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\log(\mathbf{\Lambda}_k) - \frac{\nu}{2}\mathbf{\Lambda}_k + c_{\mathbf{\Lambda}} = \\ & \left(\frac{\nu}{2}-1\right)\log(\mathbf{\Lambda}_k) - \frac{\nu + [\boldsymbol{\varphi}_k]_{ii}}{2}\mathbf{\Lambda}_k + c_{\mathbf{\Lambda}} \end{aligned} \quad (45)$$

其后验概率密度函数的形式为:

$$q_{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{\Lambda}_k) = G(\mathbf{\Lambda}_k; \frac{\nu}{2}, \frac{\nu + [\boldsymbol{\varphi}_k]_{ii}}{2}) \quad (46)$$

其中:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_k &= \mathbf{R}^{-1}((\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{k|k}))(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_{k|k}))^T + \mathbf{P}_{z, k|k}) + \\ & (\Delta \mathbf{R}^{-1} \Delta^T + I) E[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T] - \mathbf{R}^{-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}_k (\mathbf{z}_k - h(\bar{\mathbf{x}}_{k|k}))^T - \\ & \Delta \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z}_k - h(\bar{\mathbf{x}}_{k|k}))^T \bar{\mathbf{u}}_k^T \end{aligned} \quad (47)$$

式中:式(35)、(40)、(45)中的 c_x 、 c_u 和 $c_{\mathbf{\Lambda}}$ 是与变量 \mathbf{x}_k 、 \mathbf{u}_k 和 $\mathbf{\Lambda}_k$ 相关的常数。

3 仿真实验

为了验证所提算法的有效性,考虑时变 Skew-T 分布噪声模型,分别采用 CKF、SkewEKF 以及 VIRCKF 算法对目标跟踪系统进行仿真实验。本文主要通过 3 种算法的均方根误差(RMSE)来说明算法的滤波性能。令目标运动模型为匀速模型,目标运动方程为:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (48)$$

式中:状态向量为 $\mathbf{x}_k = [x_k \ \dot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k]^T$, x_k 、 y_k 分别 k 时刻表示目标在 x 和 y 方向的位置, \dot{x}_k 、 \dot{y}_k 分别表示 k 时刻目标在 x 和 y 方向的速度,且:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

式中:采样时间 $T = 1$ s,过程噪声协方差矩阵 $\mathbf{Q} = \text{diag}([5 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-2}, 5 \times 10^{-3}])$ 。

量测方程为:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \arctan(\frac{y_k}{x_k}) \end{bmatrix} + \mathbf{e}_k \quad (50)$$

式中: $\mathbf{z}_k = [r_k \ \theta_k]^T$, r_k 和 θ_k 分别表示 k 时刻目标径向距离与方位角。量测噪声参数设置如下:

$$\begin{cases} \delta = 0.3, v = 15, \mathbf{R} = 4\mathbf{I}_{2 \times 2}, t \in [0, 100) \text{ s} \\ \delta = 0.3, v = 15, \mathbf{R} = 9\mathbf{I}_{2 \times 2}, t \in [100, 150) \text{ s} \\ \delta = 0.3, v = 15, \mathbf{R} = 25\mathbf{I}_{2 \times 2}, t \in [150, 200] \text{ s} \end{cases}$$

假设量测噪声协方差初始值 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}_2$,令目标的初始位置为 $\mathbf{x}_{0|0} = [500 \text{ m}, 25 \text{ m/s}, 500 \text{ m}, -20 \text{ m/s}]^T$,状态协方差矩阵初始值 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}([2, 10^{-2}, 2, 10^{-2}])$ 。仿真时间为 200 s。对 3 种算法分别进行 100 次

Monte Carlo 实验。

图 2、图 3 分别为 3 种算法在 X、Y 方向的位置和速度均方根误差。从图 2 可以看出,当 $t > 100$ s 时,由于量测噪声的突然增大,CKF 算法的均方根误差出现波动;当 $t > 150$ s 时,量测噪声再次增大,CKF 算法的 RMSE 也随之增大。SkewEKF 算法的 RMSE 明显小于 CKF,因为 SkewEKF 算法的本质是利用泰勒级数展开将非线性系统进行线性化,存在一定误差。而本文所提算法通过构建近似分布,迭代计算,直至逼近系统真实后验概率密度函数,具有自适应性。从图 3 可以看出,在 150 s 噪声增大时,3 种算法速度 RMSE 均增大,但 VIRCKF 算法 RMSE 更小。

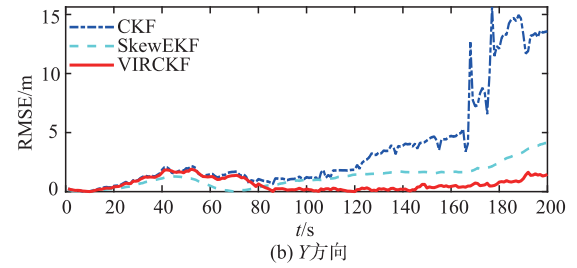
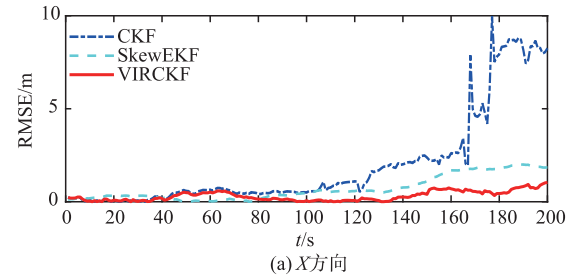


图 2 不同方向的位置均方根误差

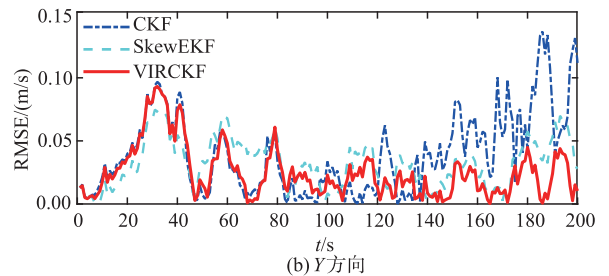
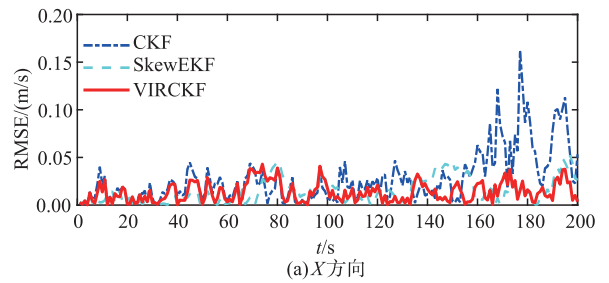


图 3 不同方向的速度均方根误差

通过计算 VIRCKF 算法的变分下界函数,对算法的收敛性进行分析。图 4 为实验过程中系统状态的变分下界函数。可以看出,该算法在 X 方向位置变分下界稳定在 $[-3.40, -3.00]$,在 Y 方向最终稳定在 $[-4.41, -3.65]$,表明算法稳定收敛。

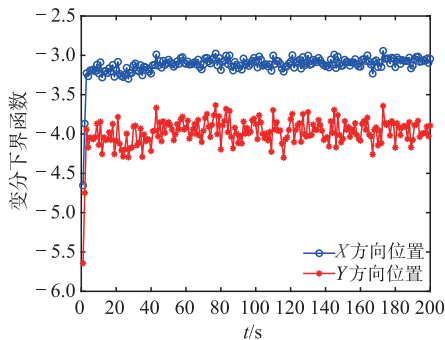


图 4 变分下界函数

图 5 为量测噪声的近似分布拟合真实分布的过程,可以看出,随着参数的迭代优化,近似分布会不断逼近真实分布。

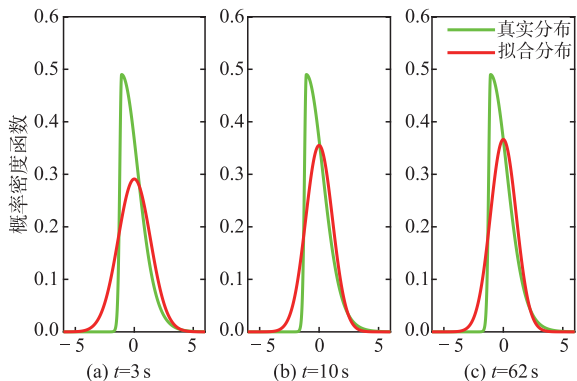
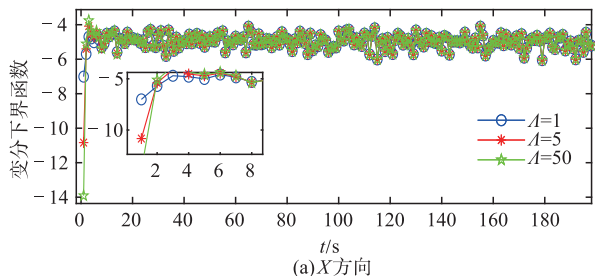


图 5 量测噪声的真实分布与近似分布的拟合过程

图 6、图 7 分别为 $\bar{u}, \bar{\Lambda}$ 不同初始状态对系统变分下界函数的影响。从图中可以看出,不同初始参数条件下,利用变分贝叶斯算法均能使系统的变分下界函数收敛。在初始阶段,初始参数设置越接近真实值,其收敛速度越快,偏差较大的初始值收敛时间更长。当参数收敛后,无论真实数据是否发生变化,均对估计过程不产生影响。

分别对 3 种算法的计算复杂度进行分析,CKF 算法的时间复杂度为 $O(6Nn)$,SkewEKF 的时间复杂度为 $O(Nm)$,VIRCKF 算法的时间复杂度为 $O(8Nm+6Nnm+10N)$ 。其中, N 为总运行时间, $2n$ 表示容积点数, m 为变分迭代次数。虽然 VIRCKF 的时间复杂度更高,但综合 3 种算法的滤波效果和鲁棒性分析,本文所提的 VIRCKF 算法滤波精度更高,性能更加优越。



(a) X方向

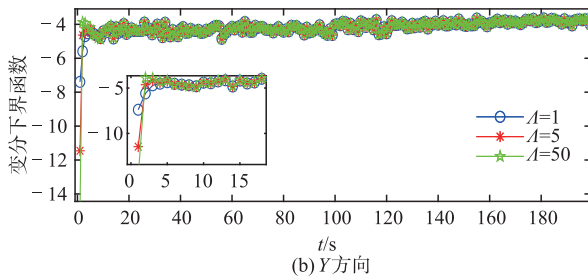
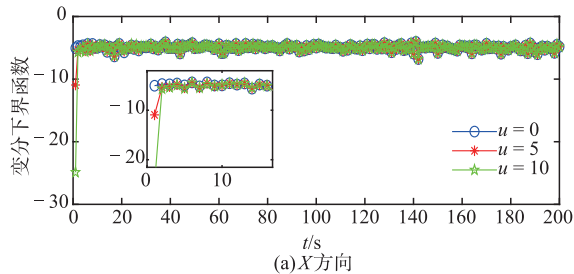
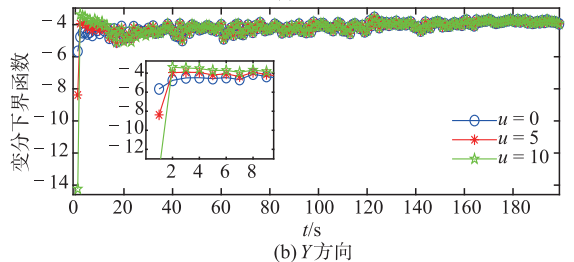


图 6 变分下界函数随 $\bar{\Lambda}$ 值的变化



(a) X方向



(b) Y方向

图 7 变分下界函数随 \bar{u} 值的变化

4 结语

本文针对不确定重尾量测噪声条件下非线性系统目标跟踪问题,提出基于变分推理的鲁棒容积卡尔曼滤波算法。将 Skew-T 分布的概率密度函数用近似形式代替,然后利用球面径向规则对函数进行数值积分求解,同时结合变分推理学习估计得到系统的近似联合后验分布。实验结果表明,在量测噪声为重尾分布且参数不确定时,本文算法具有较高的估计精度和较好的滤波效果。未来可以探索更有效的估计算法,解决不确定过程噪声与量测噪声下的机动目标跟踪问题。

参考文献

- [1] 杨曦,李少毅,王晓田. 复杂干扰环境下基于频域 Gabor 滤波和相关滤波的空中目标跟踪算法[J]. 西北工业大学学报, 2020, 38(6): 1146-1153.
- [2] 刘妹琴,韩学艳,张森林. 基于水下传感器网络的目标跟踪技术研究现状与展望[J]. 自动化学报, 2021, 47(2): 235-251.
- [3] LI X R, JILKOV V P. A Survey of Maneuvering Target Tracking-Part VII: Approximate Nonlinear Density Filtering in Mixed Time [C]//Proceedings of SPIE Signal and Data Processing of Small Targets.

- Orlando, Florida; SPIE, 2010: 1-12.
- [4] SINGH A K, PAL B C. Decentralized Robust Dynamic State Estimation in Power Systems using Instrument Transformers [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(6): 1541-1550.
- [5] YAN H, WANG F. A Method of Strong Tracking UKF Based on Adaptive Constraints [C]//*IEEE 3rd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC)*. [S. l.]: IEEE, 2019: 2339-2343.
- [6] ZHANG A, BAO S D, GAO F. A Novel Strong Tracking Cubature Kalman Filter and Its Application in Maneuvering Target Tracking[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2019, 32(11): 2489-2502.
- [7] XU Y B, XU K, WAN J W. Research on Particle Filter Tracking Method Based on Kalman Filter[C]//*IEEE Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC)*. [S. l.]: IEEE Press, 2018: 1564-1568.
- [8] 石勇, 韩崇昭. 自适应 UKF 算法在目标跟踪中的应用 [J]. *自动化学报*, 2011, 37(6): 755-759.
- [9] ZHAO L, WANG X X. An Adaptive UKF with Noise Statistic Estimator [C]//*IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*. [S. l.]: IEEE Press, 2009: 614-618.
- [10] CHANG L, HU B, CHANG G. Huber-Based Novel Robust Unscented Kalman Filter[J]. *IET Science, Measurement & Technology*, 2012, 6(6): 502-759.
- [11] 彭美康, 郭蕴华, 汪敬东. 基于鲁棒容积卡尔曼滤波的自适应目标跟踪算法[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(4): 793-800.
- [12] SARKKA S, NUMMENMAA A. Recursive Noise Adaptive Kalman Filtering by Variational Bayesian Approximations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(3): 596-600.
- [13] 许红, 袁华东, 谢文冲. 角闪烁下基于变分贝叶斯-交互式多模型的目标跟踪[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(7): 1583-1590.
- [14] FAN R, HUANG R K, DIAO R S. Gaussian Mixture Model-Based Ensemble Kalman Filter for Machine Parameter Calibration[J]. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2018: 1-10.
- [15] 董祥祥, 吕润妍, 蔡云泽. 基于变分贝叶斯理论的不确定厚尾噪声滤波方法[J]. *上海交通大学学报*, 2020, 54(9): 881-889.
- [16] ZHU H, LEUNG H, HE Z S. A Variational Bayesian Approach to Robust Sensor Fusion Based on Student-t Distribution [J]. *Information Sciences*, 2013, 221: 201-214.
- [17] HUANG Y L, ZHANG Y G. Robust Student's t-Based Stochastic Cubature Filter for Nonlinear Systems with Heavy-Tailed Process and Measurement Noises [J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 7 964-7 974.
- [18] WANG Z, XUE W, LING H. An EKF Algorithm Based on a Skew-T measurement Noise Model [C]//*36th Chinese Control Conference (CCC)*. [S. l.]: IEEE Press, 2017: 19-26.
- [19] HENRI N, TOHID A. Skew-T Filter and Smoother with Improved Covariance Matrix Approximation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(21): 5618-5633.
- [20] REINALOD B, ARELLANO V, SIMONE B. On the Asymptotic Joint Distribution of Multivariate Sample Moments[J]. *Advances in Statistics-Theory and Applications*, 2021: 181-206.
- [21] LEE S X, LEEMAQZ K L, MCLACHLAN G J. A Block EM Algorithm for Multivariate Skew Normal and Skew T-Mixture Models[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 2018, 29(11): 5581-5591.
- [22] THOMAS C, SLOCK D. Variational Bayes Kalman Filtering for Dynamic Sparse Bayesian Learning [C]//*International Conference on Time Series and Forecasting*. Berlin: Springer, 2019:1-12.
- [23] SUN S L, HE S J. Generalizing Expectation Propagation with Mixtures of Exponential Family Distributions and an Application to Bayesian Logistic Regression[J]. *Neurocomputing*, 2019, 337: 180-190.
- [24] 沈忱, 徐定杰, 沈锋. 基于变分推断的一般噪声自适应卡尔曼滤波[J]. *系统工程与电子技术*, 2014, 36(8): 1466-1472.

(编辑:徐敏)