短码长的五元最优局部修复码

张　茂[1]，李瑞虎[1]，宋　倩[2]，陈　刚[3]

(1. 空军工程大学基础部，西安，710051；2. 兰州市 27 支局 30 信箱 55 号，兰州，732750；
3. 75837 部队，广州，510000)

摘要　在分布式存储系统中，应用局部修复码(LRCs)，可以提高修复错误节点的效率。研究了码长不大于 31 的五元最优 LRCs，给出了 4 类五元最优 LRCs 及其具体刻画。首先利用距离最优的线性码和 Simplex 码等特殊码，构造了性能较好的 LRCs 的校验矩阵。对已得到的 LRCs，通过矩阵变换、矩阵拼接和删截的方法，给出了其他 LRCs。所构造的五元 LRCs 的最小距离为 $2\leqslant d\leqslant 8$ 和 $d=10$，参数均达到了 Singleton 界。这些结果对于其他五元最优 LRCs 和一般域上最优 LRCs 的构造具有借鉴意义。

关键词　局部修复码；最优码；Singleton 形界

DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2020.03.017

中图分类号　O157.4　　**文献标志码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2020)03-0106-05

Optimal Quinary Locally Repairable Codes with Small Code Length

ZHANG Mao[1], LI Ruihu[1], SONG Qian[2], CHEN Gang[3]

(1. Department of Basic Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;
2. No. 55, box 30, bureau 27, Lanzhou 732750, China; 3. Unit 75837, Guangzhou 510000, China)

Abstract　The application of locally repairable codes (LRCs) in distributed storage system can improve the efficiency of repairing lost nodes. The optimal quinary LRCs with a code length of not more than 31 are studied and Four kinds of optimal quinary LRCs and their characterization are given. Firstly, parity-check matrixes with good performance of LRCs are constructed by using the distance-optimal linear codes and special codes such as Simplex code. For the known LRCs, other LRCs are given by means of shortening, puncturing, adding or deleting column vectors. The results show that these optimal LRCs have minimum distance $2\leqslant d\leqslant 8$ or $d=10$ and all the results respect the Singleton-like bound. These results have reference value for the construction of other optimal quinary LRCs and optimal LRCs over general fields.

Key words　locally repairable codes; optimal LRC; Singleton-like bound

在大数据和云存储系统的发展中，分布式存储系统技术起着重要的作用。在现代分布式存储系统中，简单的数据备份是解决节点错误所采用的最广泛的方法，例如三重备份[1]。随着数据量的急剧增加，备份这种方法的缺点被暴露了出来，纠删码出现在人们的视野中[2-3]。2012 年，Gopalan 等人提出了

收稿日期： 2019-04-26
基金项目： 国家自然科学基金(11801564，11901579)；空军工程大学基础部研究生创新基金
作者简介： 张　茂(1996—)，男，陕西西安人，硕士生，主要从事大数据存储编码研究。E-mail:llzsy2015@163.com
通信作者： 李瑞虎(1966—)，男，安徽亳州人，教授，主要从事量子编码、大数据存储编码研究。E-mail:llzsy2015@163.com

引用格式：张茂，李瑞虎，宋倩，等. 短码长的五元最优局部修复码[J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2020，21(3)：106-110. ZHANG Mao, LI Ruihu, SONG Qian, et al. Optimal Quinary Locally Repairable Codes with Small Code Length[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2020, 21(3): 106-110.

一种新的纠删码——局部修复码（LRC），它将数据修复转换成了构造满足一定条件的经典码的问题[4]：一个局部度为 r 的 $[n,k,d]$ 线性码被记为 $[n,k,d;r]$，其最小距离满足界：

$$d \leqslant n-k-\lceil \frac{k}{r} \rceil+2 \tag{1}$$

这个界被称为 Singleton 形界，达到这个界的 LRCs 被称为最优 LRCs。

关于最优 LRCs，前人已经做了很多工作[5-19]。目前，在二元、三元域上最优 LRCs 的研究已经取得了一定进展，但在其他域上还有广阔的发展空间。二元最优 LRCs 的最小距离不大于 4[7]，三元最优 LRCs 的最小距离为 2，3，4，5 和 6[8]。2014 年，文献[6]给出了四元域上 $d=3$，$r=3,4$ 的最优 LRCs。文献[5]和[11]、[9]、[14]和[17]分别给出了 $n \leqslant q$ 时、$r+1 \mid n$ 时和 $d \leqslant 5$ 时最优 LRCs 的构造。利用二元恒重码，文献[19]构造了 4 类距离为 5 和 6 的最优 LRCs。当 $r \geqslant d-2$ 且 $r+1 \mid n$ 时，文献[18]给出了 4 类距离不小于 7 的最优 LRCs。文献[12]运用群论构造了大域上的最优 LRCs。关于最优 LRCs 的码长的界在文献[10]和[16]中给出。存在一些研究一般域上最优 LRCs 的论文结果涉及到五元域，具体的码见表 1。

表 1　文献涉及到五元最优 LRCs 的结果

最优 LRCs	文献
$[4,2,2;1]$	[12]
$[6,3,3;2]$，$[9,5,3;2]$，$[12,7,3;2]$	[13]
$[4i,3i-1,3;3]$（$i \leqslant 2$） $[4j,3j-2,4;3]$（j 为奇数）	[14]
$[2s,s-1,4;1]$（s 为奇数） $[4u,3u-2,4;3]$（u 为奇数） $[6v,5v-2,4;5]$（$v \leqslant 5$）	[15]

对于参数为 $[n,k,d]$ 的 q 元线性码，如果参数为 $[n,k,d+1]$ 的码不存在，则称该 q 元码为最优的。文献[20]中已经讨论了 3 维和 4 维最优码的局部度，其中得到的 10 个码长不大于 12 的局部修复码的参数达到了 Singleton 形界。由于小域上的 LRCs 具有编解码复杂度低和易于实现等优点，鉴于以上工作，继续构造了大量新的最优 LRCs。文章的主要结果如下：

1）当 $n \leqslant 12$，$2 \leqslant k \leqslant n-1$，$[n,k] \neq [7,2]$，$[9,2]$ 和 $[11,2]$ 时，对于任意的距离最优的线性码 $[n,k,d]$ 均可构造为最优 $[n,k,d;r]$ LRCs；

2）当 $0 \leqslant i \leqslant 16$，$0 \leqslant j \leqslant 2$ 时，存在参数为 $[31-i,28-i,3;24-i]$ 和 $[15-j,12-j,3;8-\lfloor \frac{2j}{3} \rfloor]$ 的最优 LRCs；

3）当 $0 \leqslant s \leqslant 13$，$0 \leqslant t \leqslant 2$，$0 \leqslant u \leqslant 7$ 且 $u \neq 1$ 时，存在参数为 $[26-s,22-s,4;19-s]$，$[16-t,11-t,4;5-\lceil \frac{t}{2} \rceil]$ 和 $[24-u,19-u,4;9-\lfloor \frac{2u}{3} \rfloor]$ 的最优 LRCs；

4）存在以下局部度为 1 的最优 LRCs：$[6,2,4;1]$，$[10,3,6;1]$，$[8,3,4;1]$，$[6,3,2;1]$，$[8,4,2;1]$，$[10,4,4;1]$，$[12,4,6;1]$，$[10,5,2;1]$，$[12,5,4;1]$。

以上所有的最优 LRCs 均由最优码构造。其中 1）～3）中的 LRCs 是距离最优的，4）中的 LRCs 不是距离最优的。

1　预备知识

首先，为了便于叙述作以下标记：

记 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$；$\boldsymbol{1}_n$ 和 $\boldsymbol{0}_n$ 各自为长度为 n 的全 1 和全 0 的行向量；对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，m 个 $\boldsymbol{A}$ 的并置 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A})$ 记为 $m\boldsymbol{A}$。

设 F_5 为五元有限域，F_5^n 为 F_5 上的 n 维向量空间。F_5^n 上的 k 维子空间 C，记为线性码 C。n 为该码的码长，C 中的向量称为码字。K 表示 C 中码字个数，即 $K=|C|$，$1 \leqslant K \leqslant q^n$。

记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的 Hamming 重量定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 中非零分量 a_i（$i \in [n]$）的个数。如果 C 中所有非零码字的最小 Hamming 重量为 d，则 d 称为码 C 的最小距离，记为 C。

对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n) \in F_q^n$，$x$ 与 y 的内积为 $(x,y)=\sum x_i y_i$，$i=1,2,\cdots,n$。将 $C^{\perp}=\{x \mid (x,c)=0, x \in F_q^n, c \in C\}$ 称为码 C 的对偶码。因此对于线性码 $C=[n,k]$，其对偶码为 $C=[n,n-k]_q$。如果线性码 $C=[n,k,d]$ 满足 $d=n-k+1$，则称 C 为极大距离可分码（Maximal Distance Separable Code，MDS 码），如果 $d=n-k$，称 C 为拟 MDS 码。

由 C 的一组基所构成的矩阵 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}_{k,n}$ 叫做码 C 的生成矩阵，C 的生成矩阵 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{n-k,n}$ 叫做码 C 的校验矩阵，记 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{h}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{h}_{n-k}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。对于任意的 $i \in [n]$，如果 h_{i_j} 的第 i 个坐标非零，则称这个坐标被 h_{i_j} 覆盖。记 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，对于任意的 $i \in [n]$，如果 $\boldsymbol{H}_1$ 覆盖了 $\boldsymbol{H}$ 中的每一个坐标，$\boldsymbol{H}_1$ 中覆盖 $\boldsymbol{H}$ 行被称为局部度行（Locality Rows）[21]。

记线性码 $C=[n,k,d]$。对任意的 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n) \in C$，若第 i 个码元 c_i 可以由其他个码元修复，则称 c_i 的局部度为 r。如果 C 中所有码元的最大局部度为 r，则称码 C 的局部度为 r。

线性码的局部度可以根据生成阵和校验阵通过如下方法来判断：

引理 1[4] 记 $\boldsymbol{G}=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ 为码 $C=[n,k,d]$ 的一个生成阵。对于任意的 $rA_i\subseteq[n]/\{i\}$，如果存在最大为 r 的集合 $A_i\subseteq[n]/\{i\}$，使得 g_i 是 $g_j\ (j\in A_i)$ 的线性组合，则码 C 的局部度为 r。

引理 2[21] 记 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{h}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{h}_{n-k}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为码 $C=[n,k,d]$ 的校验阵。对于任意的 $i\in[n]$，若校验阵 $\boldsymbol{H}$ 的行 h_{i_j} 使得第 i 个坐标被 h_{i_j} 覆盖，并且 h_{i_j} 的重量最大为 $r+1$，则码 C 的局部度为 r。

引理 3[21] 记 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 为码 $C=[n,k,d]$ 的校验阵。如果 $\boldsymbol{H}_1$ 覆盖了 $\boldsymbol{H}$ 的每一个坐标且每一个局部度行的重量均不大于 $r+1$，则称码 C 的局部度为 r。

我们运用**引理 1～3** 来确定接下来构造得到的码的局部度，构造所用到的最优码见文献[22]。

2 由 $k\leqslant 4$ 的距离最优的线性码构造 LRCs

显然由 $1_n=(1,1,\cdots,1)$ 可得到平凡码 $[n,1,n;1]$ 和 $[n,n-1,2;n-1]$。本节将由生成阵构造 $k\leqslant 4$ 的最优 LRCs。

2.1 由 MDS 码构造最优 LRCs

定理 1 存在以下最优 LRCs：

1) $[6-i,2,5-i;2]$ 和其对偶码 $[6-i,4-i,3;4-i]$，$(0\leqslant i\leqslant 3)$；

2) $[6-j,3,4-j;3]$ 和其对偶码 $[6-j,3-j,4;3-j]$，$(0\leqslant j\leqslant 2)$；

3) $[2s,2,2s-2;1]$，$[2s,3,2s-4;1]$，$(3\leqslant s\leqslant 6)$；$[12-2u,4,6-2u;1]$，$(0\leqslant u\leqslant 2)$ 和 $[12-2v,5,4-2v;1]$，$(0\leqslant v\leqslant 1)$。

证明构造如下 2 个生成矩阵：

$$\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{G}_{2\times 6}=\begin{pmatrix}101111\\011234\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_{3\times 6}=\begin{pmatrix}100111\\010142\\001243\end{pmatrix}$$

易证明 $\boldsymbol{G}_{2\times 6}$ 生成 $[6,2,5;2]$ 码，$\boldsymbol{G}_{3\times 6}$ 生成 $[6,3,4;3]$ 码。

1) 当 $0\leqslant i\leqslant 3$ 时，删除 $\boldsymbol{G}_{2\times 6}$ 矩阵的最后 i 列可得到 $\boldsymbol{G}_{2\times n}=\boldsymbol{G}_{2\times(6-i)}$，$n=6-i\ (n\geqslant 3)$。$\boldsymbol{G}_{2\times n}$ 生成最优 LRC $\boldsymbol{C}_{2\times n}=[n,2,n-1;2]$，其对偶码为 $[n,n-2,3;n-2]$。由此可得到最优 LRCs $[6,2,5;2]$，$[5,2,4;2]$，$[4,2,3;2]$，$[3,2,2;2]$，$[6,4,3;4]$，$[5,3,3;3]$，$[4,2,3;2]$ 和 $[3,1,3;1]$。

2) 删除 $\boldsymbol{G}_{3\times 6}$ 矩阵的最后 j 列 $(0\leqslant j\leqslant 2)$ 可得到矩阵 $\boldsymbol{G}_{3\times n}=\boldsymbol{G}_{3\times(6-j)}\ (n=6-j)$。$\boldsymbol{G}_{3\times n}$ 生成最优 LRC $\boldsymbol{C}_{3\times n}=[n,3,n-2;3]$，其对偶码为 $[n,n-3,4;n-3]$。由此得到最优 LRCs $[6,3,4;3]$，$[5,3,3;3]$，$[4,3,2;3]$，$[6,3,4;3]$，$[5,2,4;2]$ 和 $[4,1,4;1]$。

3) 令 $\boldsymbol{G}_{2\times 2m}=(\boldsymbol{G}_{2\times m},\boldsymbol{G}_{2\times m})$，$\boldsymbol{G}_{3\times 2m}=(\boldsymbol{G}_{3\times m},\boldsymbol{G}_{3\times m})$，$(3\leqslant m\leqslant 6)$，可得到最优 LRCs $[2m,2,2m-2;1]$ 和 $[2m,3,2m-4;1]$。同样，可构造最优 LRCs $[2m,4,2m-6;1]$，$(4\leqslant m\leqslant 6)$ 和 $[2m,5,2m-8;1]$ $(5\leqslant m\leqslant 6)$。由此可得到最优 LRCs $[12,2,10;1]$，$[10,2,8;1]$，$[8,2,6;1]$，$[6,2,4;1]$，$[12,3,8;1]$，$[10,3,6;1]$，$[8,3,4;1]$，$[6,3,2;1]$，$[8,4,2;1]$，$[10,4,4;1]$，$[12,4,6;1]$，$[10,5,2;1]$ 和 $[12,5,4;1]$。其中 $[12,2,10;1]$，$[10,2,8;1]$，$[8,2,6;1]$ 和 $[12,3,8;1]$ 是距离最优的。

2.2 由拟 MDS 码构造最优 LRCs

本节将分别应用生成矩阵和校验矩阵构造 $3\leqslant k\leqslant 4$ 的最优 LRCs。

定理 2 存在最优 LRCs $[n,3,n-3;2]$，$(7\leqslant n\leqslant 11)$ 和 $[n,4,n-4;3]$，$(7\leqslant n\leqslant 12)$。

证明根据文献[20]，$\boldsymbol{G}_{3\times 11}$ 和 $\boldsymbol{G}_{4\times 12}$ 生成 $[11,3,8;2]$ 和 $[12,4,8;3]$ 最优 LRCs，其中：

$$\boldsymbol{G}_{3\times 11}=\begin{pmatrix}10001111111\\01010331221\\00123023414\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_{4\times 12}=\begin{pmatrix}100001111111\\010010131232\\001011023213\\000112402311\end{pmatrix}$$

1) 当 $0\leqslant i\leqslant 4$ 时，删除 $\boldsymbol{G}_{3\times 11}$ 的最后 i 列可得到以下最优码的生成阵：$[11,3,8;2]$，$[10,3,7;2]$，$[9,3,6;2]$，$[8,3,5;2]$ 和 $[7,3,4;2]$。

2) 当 $0\leqslant j\leqslant 5$ 时，删除 $\boldsymbol{G}_{4\times 12}$ 的最后 j 列可得到以下最优码的生成阵：$[12,4,8;3]$，$[11,4,7;3]$，$[10,4,6;3]$，$[9,4,5;3]$，$[8,4,4;3]$ 和 $[7,4,3;3]$。

3 由 $k\geqslant 5$ 的距离最优的线性码构造 LRCs

给出了 7 个最优 LRCs 的校验阵，矩阵中横线上面的行代表局部度行。由这些矩阵可以得到其他最优 LRCs。

3.1 由 $k\geqslant 5$ 的拟 MDS 码构造最优 LRCs

给出以下 5 个码的校验阵：

$\boldsymbol{H}_{2\times 12}=(\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{I}_2,\cdots,\boldsymbol{I}_2)$

$$\boldsymbol{H}_{3\times 31}=\begin{pmatrix}1001101101101101111111111111111\\0101012013014011234123412341234\\0010110220330441111222233334444\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_{4\times26}=\left(\begin{array}{c}01001010111011111111111111\\10000111010141431233422324\\00110002404314334131223122\\ \hline 01432434140032043420311240\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{H}_{5\times12}=\left(\begin{array}{c}010001101011\\100001410104\\001110001033\\ \hline 100140230130\\321400210120\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{H}_{6\times12}=\left(\begin{array}{c}010000101111\\001000012112\\100100002332\\000011004334\\ \hline 102112114021\\144021222132\end{array}\right)$$

易知 $\boldsymbol{H}_{2\times12}$,$\boldsymbol{H}_{3\times31}$,$\boldsymbol{H}_{4\times26}$,$\boldsymbol{H}_{5\times12}$,$\boldsymbol{H}_{6\times12}$对应最优 LRCs[12,10,2;5],[31,28,3;24],[26,22,4;19],[12,7,5;5]和[12,6,6;5]。

定理 3　存在以下最优 LRCs:

1)$[12-i,10-i,2;5-\lfloor\frac{i}{2}\rfloor]$,$(0\leqslant i\leqslant5)$;

2)$[31-j,28-j,3;24-j]$,$(0\leqslant j\leqslant16)$,$[15-s,12-s,3;8-\lfloor\frac{2s}{3}\rfloor]$,$(0\leqslant s\leqslant7)$;

3)$[26-t,22-t,4;19-t]$,$(0\leqslant t\leqslant14)$,$[11-u,7-u,4;5-u]$,$(0\leqslant u\leqslant2)$;

(4)$[12-v,7-v,5;5-v]$,$(0\leqslant v\leqslant2)$;

(5)[12,6,6;5]和[11,5,6;4]。

证明:

1)删除矩阵 $\boldsymbol{H}_{2\times12}$的最后 i 列$(0\leqslant i\leqslant 5)$可得到 $\boldsymbol{H}_{2\times(12-i)}$和相应的最优 LRC$[12-i,10-i,2;5-\lfloor\frac{i}{2}\rfloor]$;

2)最优 LRC$[31-j,28-j,3;24-j]$的校验阵 $\boldsymbol{H}_{3\times(31-j)}$可通过删除 $\boldsymbol{H}_{3\times31}$的最后 j 列$(0\leqslant j\leqslant16)$得到;继续删除 $\boldsymbol{H}_{3\times15}$的最后 s 列$(0\leqslant s\leqslant7)$,可得到 $\boldsymbol{H}_{3\times(15-s)}$,其对应最优 LRC $[15-s,12-s,3;8-\lfloor\frac{2s}{3}\rfloor]$;

3)最优 LRC$[26-t,22-t,4;19-t]$的校验阵 $\boldsymbol{H}_{4\times(26-t)}$可通过删除 $\boldsymbol{H}_{4\times26}$的最后 t 列$(0\leqslant t\leqslant14)$得到;继续删除 $\boldsymbol{H}_{4\times12}$的最后 u 列$(1\leqslant u\leqslant3)$,可得到 $\boldsymbol{H}_{4\times(12-u)}$,其对应最优 LRCs[11,7,4;5],[10,6,4;4]和[9,5,4;3]。

4)最优 LRCs[11,6,5;4]和[10,5,5;4]的校验阵 $\boldsymbol{H}_{5\times(12-v)}$可通过删除 $\boldsymbol{H}_{5\times12}$的最后 v 列$(1\leqslant v\leqslant2)$得到;

5)删除 $\boldsymbol{H}_{6\times12}$的最后一列可得到 $\boldsymbol{H}_{6\times11}$和最优 LRC[11,5,6;4]。

3.2　$k\geqslant5$ 且 $k+d<n$ 的 LRCs

定理 4　存在参数为[12,5,6;2],$[24-u,19-u,4;9-\lfloor\frac{2u}{3}\rfloor]$,$(0\leqslant u\leqslant6,u\neq1)$和$[24-v,19-v,4;9-\lceil\frac{v}{2}\rceil]$,$(7\leqslant v\leqslant10)$的最优 LRCs。

证明 给出如下 2 个校验阵:

$$\boldsymbol{H}_{7\times12}=\left(\begin{array}{c}111000000000\\000111000000\\000000111000\\000000000111\\ \hline 021021001001\\002022020011\\011010020004\end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{H}_{5\times24}=\left(\begin{array}{c}111111000000000000110110\\000000111111000000201301\\000000000000111111021024\\ \hline 124214011330241124410133\\033022103044041430121110\end{array}\right)$$

易知 $\boldsymbol{H}_{7\times12}$和 $\boldsymbol{H}_{5\times24}$对应最优 LRCs[12,5,6;2]和[24,19,4;9]。

删除 $\boldsymbol{H}_{5\times24}$的最后 i 列$(1\leqslant i\leqslant10)$可得到参数为[23,18,4;9],[22,17,4;8],[21,16,4;7],[20,15,4;7],[19,14,4;6],[18,13,4;5],[17,12,4;5],[16,11,4;5],[15,10,4;4]和[14,9,4;4]的 LRCs。其中除了[23,18,4;9]外,其余均为最优的。

综上所述,**定理 1 ～4** 给出了前言部分的所有结果。

4　结语

本文研究了五元域上最优 LRCs 的构造,并给出了 4 类最优 LRCs。除了参数为[12,2,10;1]的最优 LRC,其他最优 LRCs 均满足最小距离 $d=3,4$ 或 $n\leqslant12$ 时 $d\leqslant8$。文中给出了大量五元最优 LRCs,然而,关于五元域上是否存在其他最优 LRCs,仍需要进行进一步研究。

参考文献

[1]　WEATHERSPOON H, KUBIATOWICZ J. Erasure Coding vs Replication: a Quantitative Comparison [C]// Proceeding of International Workshop on Peer-to-Peer Systems. Cambridge, MA, USA: [s. n.], 2002:328-338.

[2]　HUANG C, SIMITCI H, XU Y, et al. Erasure Coding in Windows Azure Storage [C]// Proceeding of USENIX Annual Technical Conference. Boston, MA,

USA:[s. n.], 2012: 15-26.

[3] KOPPARTY S, SARAF S, YEKHANIN S. High-Rate Codes with Sublinear-Time Decoding [C]// Proceeding of 43rd ACM Symposium Theory Computer, STOC' 11. San Jose, CA, USA: ACM, 2011: 167-176.

[4] GOPALAN P, HUANG C, SIMITCI H, et al. On the Locality of Codeword Symbols [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(11): 6925-6934.

[5] TAMO I, BARG A. A Family of Optimal Locally Recoverable Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(8):4661-4676.

[6] ERNVALL T, WESTERBACK T, HOLLANTI C. Constructions of Optimal and Almost Optimal Locally Repairable Codes [C]// Proceeding of 4th International Conference on Wireless Communications, Vehicular Technology, Information Theory and Aerospace & Electronic Systems (VITAE). Aalborg, Denmark:[s. n.], 2014:1-5.

[7] HAO J, XIA S T, CHEN B. Some Results on Optimal Locally Repairable Codes [C]// Proceeding of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Barcelona, Spain:IEEE, 2016:440-444.

[8] HAO J, XIA S T, CHEN B. On Optimal Ternary Locally Repairable Codes [C]// Proceeding of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Aachen, Germany:IEEE, 2017:171-175.

[9] TAMO I, PAPAILIOPOULOS D, DIMAKIS A. Optimal Locally Repairable Codes and Connections to Matroid Theory [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016,62(12):6661-6671.

[10] HAO J, SHUM K, XIA S T, et al. On the Maximal Code Length of Optimal Linear Locally Repairable Codes [C]// Proceeding of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Vail, CO, USA:IEEE, 2018:1326-1330.

[11] KOLOSOV O, BARG A, TAMO I, et al. Optimal LRC Codes for All Lengths $n\leqslant q$[EB/OL]. (2018-02-01)[2019-03-01]. http://arxiv.org/abs/1802.00157.

[12] JIN L F, MA L M, XING C P. Construction of Optimal Locally Repairable Codes via Automorphism Groups of Rational Function Fields [EB/OL]. (2017-10-26)[2019-03-01]. https://arxiv.org/abs/1710.09638.

[13] LI X D, MA L M, XING C P. Optimal Locally Repairable Codes via Elliptic Curves [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019,65(1):108-117.

[14] LUO Y, XING C P, YUAN C. Optimal Locally Repairable Codes of Distance 3 and 4 via Cyclic Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019, 65(2):1048-1053.

[15] TAN P, ZHOU Z C, YAN H D, et al. Optimal Cyclic Locally Repairable Codes via Cyclotomic Polynomials [J]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(2): 202-205.

[16] GURUSWAMI V, XING C P, YUAN C. How Long Can Optimal Locally Repairable Codes Be? [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019, 65(6): 3662-3670.

[17] BEEMER A, COATNEY R, GURUSWAMI V, et al. Explicit Optimal-Length Locally Repairable Codes of Distance 5 [C]// Proceeding of Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). Monticello, IL, USA:[s. n.], 2018:800-804.

[18] XING C P, YUAN C. Construction of Optimal Locally Recoverable Codes and Connection with Hypergraph [EB/OL]. (2018-11-22)[2019-03-01]. https://arxiv.org/abs/1811.09142.

[19] JIN L F. Explicit Construction of Optimal Locally Recoverable Codes of Distance 5 and 6 via Binary Constant Weight Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019,65(8):4658-4663.

[20] 宋倩,李瑞虎,付强,等. 低维五元最优线性码的局部修复度分析[J]. 计算机工程, 2019, 45(8), 125-128.

[21] HAO J, XIA S T, SHUM K, et al. Bounds and Constructions of Locally Repairable Codes: Parity-Check Matrix Approach [EB/OL]. (2016-01-21)[2019-03-01]. https://arxiv.org/abs/1601.05595.

[22] GRASSL M. Bounds on the Minimum Distance of Linear Codes [EB/OL]. (2007-01-01)[2019-03-01]. http://www.codetables.de/ Accessed 7 Aug. 2019.

(编辑:徐楠楠)