

基于主特征矢量的相干信号 DOA 估计算法

唐晓杰, 何明浩, 韩俊, 李铭伟

(空军预警学院信息对抗系, 武汉, 430019)

摘要 为了进一步提高相干信号 DOA 估计的精度, 提出了一种基于主特征矢量的相干信号 DOA 估计改进算法。算法选取了信号子空间对应的主特征向量, 将其进行反向共轭变换得到增广主特征矢量, 再构造线性预测方程, 利用加权最小二乘法求解预测方程中的多项式系数, 最后求根得到信号的 DOA 估计。改进算法克服了 PUMA 算法在信号完全相干条件下性能恶化的缺陷, 当信号完全相干以及部分相干时都具有良好的性能, 并且提高了最大可分辨信号数, 当信噪比较低、快拍数较少时仍保持较高精度。相比于 PUMA 算法, 当信号部分相干时, 文中算法的均方根误差约降低了 0.2° ; 当信号完全相干时, 均方根误差约降低了 0.8° 。通过与多种解相干算法进行比较, 算法性能得到了验证。

关键词 DOA 估计; 相干信号; 增广主特征矢量; 加权最小二乘法

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2019.06.009

中图分类号 TN911.7 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2019)06-0054-07

A Modified DOA Estimation Algorithm of Coherent Signals Based on Main Feature Vectors

TANG Xiaojie, HE Minghao, HAN Jun, LI Mingwei

(Information Countermeasure Department, Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China)

Abstract: In order to further improve the DOA estimation accuracy of coherent signals, a modified algorithm based on main feature vectors is proposed. First, the main eigenvectors corresponding to the signal subspace are selected, and the inverse conjugate transformation is performed to obtain the augmented main feature eigenvectors. Then, the linear prediction equation is constructed, and the weighted least squares method is used to solve the polynomial coefficients in the prediction equation. Finally, the DOA of the signals is obtained by finding the root of the polynomial. The modified algorithm overcomes the weakness of PUMA algorithm under conditions of the deteriorated severely performance and the completely coherent signals, and is good in performance. It's no matter whether the signals are completely coherent or partially coherent. The maximum number of the resolvable signals are improved. The high precision can be obtained when the signal-to-noise ratio is low and the number of snapshots is small. Compared with the PUMA algorithm, when the signal is partially coherent, the root mean square error of the proposed algorithm is reduced by about 0.2° ; When the signal is completely coherent, the root mean square error is reduced by about 0.8° . The performance of the algorithm is verified by comparison with various de-coherence algo-

收稿日期: 2019-05-30

基金项目: 湖北省自然科学基金(2016CFB288)

作者简介: 唐晓杰(1995—), 男, 江苏苏州人, 硕士生, 主要从事信号处理研究。E-mail: 944717905@qq.com

引用格式: 唐晓杰, 何明浩, 韩俊, 等. 基于主特征矢量的相干信号 DOA 估计算法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2019, 20(6): 54-60.
TANG Xiaojie, HE Minghao, HAN Jun, et al. A Modified DOA Estimation Algorithm of Coherent Signals Based on Main Feature Vectors[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2019, 20(6): 54-60.

rithms.

Key words: DOA estimation; coherent signals; augmented main feature eigenvectors; weighted least squares

DOA 估计是阵列信号处理中的一个重要内容,目前已广泛应用于雷达^[1]、声呐^[2]、通信^[3]等领域,其中以 MUSIC 和 ESPRIT 为代表的子空间类算法^[4-7]能够突破瑞利限,达到超高分辨,并在近 40 年来获得不断发展。

然而信号在传播过程中,易受多径效应^[8]影响形成相干信号,传统的子空间类算法在处理相干信号时性能下降严重,甚至完全失效。前向空间平滑(Forward Spatial Smooth, FOSS)算法^[9]通过子阵列的叠加来消除信号相干性,但是孔径损失严重,当阵元数为 M 时,最大测角数只有 $M/2$ 。前后向空间平滑(Forward and Backward Spatial Smooth, FBSS)算法^[10]在 FOSS 的基础上利用后向子阵列增加了平滑次数,提高了最大可分辨信号数,最多能估计 $2M/3$ 个到达角。空间平滑类算法只对数据协方差矩阵进行操作,步骤较为简单,但是孔径损失较大,估计精度不够高。文献[11]提出了特征矢量法(Eigenvector Method, EVM),选取最大特征值对应的特征矢量并构造满秩的前后向矩阵,该算法最多只能估计 $2M/3$ 个到达角,当存在多组相干信号时,性能下降严重。多重特征矢量(Multiple Eigenvector Method, MEVM)算法^[12]在 EVM 的基础上进行了改进,利用了多个特征矢量构造满秩矩阵,当组内最大相干信号数为 k_{\max} 时,最多能够估计 $M - (k_{\max} + 1)/2$ 个信号。MEVM 算法减少了孔径损失,但是增加了计算量,且需要每组相干信号数先验信息。文献[13]利用二阶统计量的方法,将组间的相干信号进行分离,再分组估计相干信号的 DOA,该算法在理论上能够突破阵元数的限制,实现相干信号的欠定估计,但是算法在组间信号分离时引入了严重的交叉干扰,影响了估计精度和最大可分辨信号数。文献[14]在文献[13]的基础上进行改进,减弱了交叉干扰,但是性能提升不明显。

20 世纪 80 年代末,最大似然估计(Maximum Likelihood, ML)算法^[15]被提出,当信噪比趋向无穷大时,其均方根误差可以达到克拉美罗界,性能优良,且可以应对相干信号,但是算法中的多维非线性优化问题带来了巨大的运算量,使得 ML 算法难以在实际中应用。寻找 ML 的快速实现方法成为了研究的热点,其中 MODE(Method of Direction Estimation)算法^[16]继承了 ML 算法能够处理相干信号的特点,并且无需进行多维搜索,降低了运算量。

但是 MODE 算法需要假设其多项式系数具有共轭对称特性,该假设不是求解多项式的充分必要条件,算法性能受信号个数影响大,鲁棒性差。文献[17]提出了一种主特征矢量分析法(Principal-Singular-Vector Utilization for Modal Analysis, PUMA),通过一种有效的方法实现了 MODE 算法中的代价函数。PUMA 在求解多项式系数时不需要任何假设,对信号个数不敏感,具有更高的精度,但当入射信号完全相干时,性能恶化严重。

受文献[11]构造前后向矩阵的启发,在 PUMA 算法的基础上,本文提出了一种改进的主特征矢量分析(Modified PUMA, MPUMA)算法,将信号子空间对应的主特征矢量进行反向共轭变换构造推广主特征矢量,使线性预测方程的个数增加到原来的 2 倍,提高了多项式系数的计算精度。

本文使用 $(\cdot)^T, (\cdot)^H, (\cdot)^{-1}$ 和 $(\cdot)^+$ 分别表示转置、共轭转置、逆运算和伪逆运算, $E\{\cdot\}, \text{vec}(\cdot), \text{tr}(\cdot)$ 和 $\text{blkdiag}(\cdot)$ 分别表示期望、矢量化操作、矩阵的迹和分块对角化操作, \mathbf{I}_m 表示 $m \times m$ 维单位矩阵, $\mathbf{0}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维零矩阵, \mathbf{J}_m 表示 $m \times m$ 维置换矩阵, \otimes 表示 Kronecker 积。

1 信号模型

假设有 K 个窄带远场信号 $s_i(t), i=1, 2, \dots, K$ 入射到 M 个阵元组成的均匀线阵上,信号到达角为 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K\}$, 满足 $K < M$, 相邻的阵元间距 d 等于半波长 $\lambda/2$ 。前 N_u 个信号是独立信号,后 $K - N_u$ 个信号分为 N_c 组相干信号,组间信号相互独立,独立信号与相干信号组数之和 $N = N_u + N_c$ 。设第 p 组含有 K_p 个相干信号,第 p 组信号为:

$$\mathbf{S}_p(t) = [\mathbf{s}_{p,1}^T(t), \dots, \mathbf{s}_{p,K_p}^T(t)]^T \quad (1)$$

其中:

$$\mathbf{s}_{p,j}(t) = \rho_{p,j} \mathbf{s}_{p,1}(t) \quad j=1, 2, \dots, K_p \quad (2)$$

式中: $\rho_{p,j}$ 为第 p 组第 j 个信号的相干系数。阵列接收数据可以表示为:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^K \mathbf{a}(\theta_i) s_i(t) + \mathbf{N}(t) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, \dots, e^{-j2\pi(M-1)d\sin(\theta_i)/\lambda}]^T$ 是导向矢量; $\mathbf{N}(t)$ 表示 M 维零均值高斯白噪声,噪声功率为 σ^2 。将式(3)写成矩阵的形式:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (4)$$

式中: $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{M \times K}$ 为阵列流形; $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T \in \mathbf{C}^{K \times 1}$ 为信号矢量。协方差矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_X &= E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} = \\ & \mathbf{A}(\theta)E\{\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)\}\mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I}_M = \\ & \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I}_M \end{aligned} \quad (5)$$

对 \mathbf{R}_X 进行特征值分解,得到:

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{U}_S \sum_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_n \sum_n \mathbf{U}_n^H \quad (6)$$

式中: \mathbf{U}_S 为大特征值对应的特征矢量构成的主特征矢量,受相干信号的影响,理想条件下 \mathbf{R}_X 的秩由 K 退化为 N , \mathbf{U}_S 的维数也退化为 N 。 \mathbf{U}_n 为小特征值对应的特征矢量构成的噪声子空间,维数为 $M-N$, \sum_S 和 \sum_n 分别表示由大特征值和小特征值构成的对角阵, $\sum_S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, $\sum_n = \text{diag}(\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots, \lambda_M)$ 。不同于相干信号条件下的信号子空间和噪声子空间,此时界定 \mathbf{U}_S 和 \mathbf{U}_n 的不再是信号个数 K ,而是信号组数 N 。

由于相干信号的存在,协方差矩阵出现秩损,不再满足 $\text{span}(\mathbf{U}_S) = \text{span}(\mathbf{A}(\theta))$,该式退化为:

$$\text{span}(\mathbf{U}_S) = \text{span}(\mathbf{A}(\theta)\mathbf{E}) \quad (7)$$

式中: \mathbf{E} 为每组相干信号的相干系数构成的 $K \times N$ 维分块对角矩阵, $\mathbf{E} = \text{blkdiag}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, 其中 \mathbf{r}_i 为第 i 组相干信号的相干系数构成的列矢量,当信号独立时, $r_i = 1$ 。由式(7)可得,存在 $N \times N$ 维非奇异矩阵 \mathbf{T} 使得:

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{E}\mathbf{T} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{G} \quad (8)$$

式中: \mathbf{G} 为 $K \times N$ 维矩阵。

2 算法流程

2.1 PUMA 算法

DOA 估计的目的就是要得到 $\theta_i, i = 1, 2, \dots, K$, 也就是要估计出 $Z_i = e^{-j2\pi d \sin(\theta_i)/\lambda}$ 的值。以 z_i, K 为根构造 K 次方程:

$$f(z) = \prod_{i=1}^K (z - z_i) = 0 \quad (9)$$

将式(9)展开成:

$$f(z) = b_0 z^K + b_1 z^{K-1} + \dots + b_K = 0 \quad (10)$$

不妨令 $b_0 = 1$ 。因此只需要确定多项式系数 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_K]^T$, 即可通过方程求根得到信号的到达角。构造 $M \times (M-K)$ 维 Toeplitz 矩阵 \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_K & b_{K-1} & \dots & b_0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_K & b_{K-1} & \dots & b_0 \end{bmatrix}^H \quad (11)$$

对于 $i = 1, 2, \dots, K$, 易知:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{a}(\theta_i) =$$

$$f(z_i) [1 \ z_i \ \dots \ z_i^{(M-K-1)}]^T = \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} \quad (12)$$

所以有:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{A}(\theta) = \mathbf{0}_{(M-K) \times K} \quad (13)$$

将等式(13)两端同时右乘矩阵 \mathbf{G} , 可得:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{U}_S = \mathbf{B}^H \mathbf{A}(\theta)\mathbf{G} = \mathbf{0}_{(M-K) \times N} \quad (14)$$

可以将 \mathbf{U}_S 表示成 $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N]$, 式中 \mathbf{u}_i 为第 i 个主特征矢量。对于 $i = 1, 2, \dots, N$, 有:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{b} - \mathbf{g}_i = \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} [u_i]_K & [u_i]_{K-1} & \dots & [u_i]_1 \\ [u_i]_{K+1} & [u_i]_K & \dots & [u_i]_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [u_i]_{M-1} & [u_i]_{M-2} & \dots & [u_i]_{M-K} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{g}_i = -[[u_i]_{K+1} \dots [u_i]_M]^T \quad (17)$$

式中: $[u_i]_K$ 表示矢量 \mathbf{u}_i 的第 K 个元素。将式(14)矢量化:

$$\text{vec}(\mathbf{B}^H \mathbf{U}_S) = \mathbf{F} \mathbf{b} - \mathbf{g} = \mathbf{0}_{(M-K)N \times 1} \quad (18)$$

式中: $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T \ \mathbf{F}_2^T \ \dots \ \mathbf{F}_N^T]^T$; $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1^T \ \mathbf{g}_2^T \ \dots \ \mathbf{g}_N^T]^T$ 。受噪声及快拍数影响,用估计值 $\hat{\mathbf{R}}_X = \sum_{t=1}^L \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)/L$ 来代替 \mathbf{R}_X , 其中 L 表示快拍数。在误差条件下,式(18)可以写成:

$$\hat{\mathbf{F}} \mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}} \quad (19)$$

文献[17]提出用加权最小二乘法(Weighted Least Squares, WLS)来求解 \mathbf{b} , 即:

$$\mathbf{b} = \underset{\mathbf{b}}{\text{argmin}} \hat{\mathbf{e}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{e}} \quad (20)$$

式中:

$$\mathbf{W} = (E\{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}^H\})^{-1} \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{b} - \hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}^H) \hat{\mathbf{u}}_S \quad (22)$$

式中: $\hat{\mathbf{u}}_S = \text{vec}(\hat{\mathbf{U}}_S)$, 表示矢量化后的主特征矢量。易知式(20)的解为:

$$\mathbf{b} = (\hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{F}})^{-1} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{g}} \quad (23)$$

然而 \mathbf{W} 中含有未知量 \mathbf{b} , 不能直接解出 $\hat{\mathbf{b}}$ 。根据式(21)将 \mathbf{W} 简化为:

$$\mathbf{W} = [(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}^H) E\{\hat{\mathbf{u}}_S \hat{\mathbf{u}}_S^H\} (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}^H)^H]^{-1} \quad (24)$$

文献[17]给出了误差条件下主特征矢量的相关矩阵,当 $i = j$ 时,

$$E\{\hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H\} = \frac{\lambda_i}{L} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^M \frac{\lambda_q}{(\lambda_i - \lambda_q)^2} \mathbf{u}_q \mathbf{u}_q^H \quad (25)$$

所以 \mathbf{W} 可以表示为:

$$\mathbf{W} = [\text{blkdiag}(\mathbf{B}^H E\{\hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_1^H\} \mathbf{B}, \mathbf{B}^H E\{\hat{\mathbf{u}}_2 \hat{\mathbf{u}}_2^H\} \mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}^H E\{\hat{\mathbf{u}}_N \hat{\mathbf{u}}_N^H\} \mathbf{B})]^{-1} \quad (26)$$

利用式(15)和(25),可将第 i 个块矩阵表示为:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{E}\{\hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H\} \mathbf{B} \approx \frac{\lambda_i \sigma^2}{L(\lambda_i - \sigma^2)^2} \mathbf{B}^H \mathbf{B} \quad (27)$$

由式(23)可知,式(27)中的 σ^2/L 可以对消。将式(27)代入式(26),得到 \mathbf{W} 的近似值:

$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{D} \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \quad (28)$$

式中:

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left[\frac{(\lambda_1 - \sigma^2)^2}{\lambda_1}, \dots, \frac{(\lambda_N - \sigma^2)^2}{\lambda_N} \right] \quad (29)$$

从而式(23)近似为:

$$\hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{F}}^H \hat{\mathbf{W}} \mathbf{F})^{-1} \hat{\mathbf{F}}^H \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{g}} \quad (30)$$

要求解 $\hat{\mathbf{b}}$, 需要先得到 $\hat{\mathbf{W}}$ 的值, 而 $\hat{\mathbf{W}}$ 又由 $\hat{\mathbf{b}}$ 来确定, 这是一个迭代更新的过程。首先可以通过式(19)的最小二乘解 $\hat{\mathbf{b}}_0 = \hat{\mathbf{F}}^+ \hat{\mathbf{g}}$ 确定 $\hat{\mathbf{b}}$ 的初始值, 再代入式(28)初始化 $\hat{\mathbf{W}}$, 然后将得到的 $\hat{\mathbf{W}}$ 代入式(30)更新 $\hat{\mathbf{b}}$, 如此循环迭代直到达到最大迭代次数, 即可优化 $\hat{\mathbf{b}}$ 的估计值。最后求解以 $\hat{\mathbf{b}}$ 为系数的方程即可得到信号的 DOA 估计。

2.2 改进的 PUMA 算法

PUMA 算法的本质是构造线性方程 $\hat{\mathbf{F}} \mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}$, 再利用 WLS 估计多项式系数 \mathbf{b} , $\hat{\mathbf{F}}$ 和 $\hat{\mathbf{g}}$ 的选择直接影响了 \mathbf{b} 的估计精度。PUMA 利用了全部的主特征矢量来构造线性方程, 数据利用率较高, 因此获得了较高的估计精度。受文献[11]构造前后向矩阵的启发, 可以将主特征矢量进行反向共轭变化构造增广主特征矢量, 进一步提高数据利用率。首先构造反向主特征矢量 $\mathbf{U}_R = \mathbf{J}_M \mathbf{U}_S^*$, 则有:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{U}_R = \mathbf{B}^H \mathbf{J}_M \mathbf{A}^* (\theta) \mathbf{G}^* = \mathbf{B}^H \mathbf{A}(\theta) \phi^{-(M-1)} \mathbf{G}^* = \mathbf{0}_{(M-K) \times N} \quad (31)$$

式中: $\phi = \text{diag} [e^{-j2\pi d \sin(\theta_1)/\lambda}, e^{-j2\pi d \sin(\theta_2)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi d \sin(\theta_K)/\lambda}]$ 。又由式(14)可知 $\mathbf{B}^H \mathbf{U}_S = \mathbf{0}_{(M-K) \times N}$, 所以有:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{U}_{SR} = \mathbf{B}^H [\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R] = \mathbf{0}_{(M-K) \times N} \quad (32)$$

式中: $\mathbf{U}_{SR} = [\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R]$ 为增广主特征矢量, 可知 \mathbf{B} 与 \mathbf{U}_{SR} 正交, 因此式(19)可以重新写为:

$$\hat{\mathbf{F}}_{SR} \mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}_{SR} \quad (33)$$

式中:

$$\hat{\mathbf{F}}_{SR} = [\hat{\mathbf{F}}^T, (\mathbf{J}_{M-K} \hat{\mathbf{F}}^*)^T]^T \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{g}}_{SR} = [\hat{\mathbf{g}}^T, (\mathbf{J}_{M-K} \hat{\mathbf{g}}^*)^T]^T \quad (35)$$

再利用 WLS 求解式(33)即可得到多项式系数 \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \underset{\mathbf{b}}{\text{argmin}} \hat{\mathbf{e}}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \hat{\mathbf{e}}_{SR} \quad (36)$$

式中:

$$\hat{\mathbf{e}}_{SR} = \hat{\mathbf{F}}_{SR} \mathbf{b} - \hat{\mathbf{g}}_{SR} = (\mathbf{I}_{2N} \otimes \mathbf{B}^H) \hat{\mathbf{u}}_{SR} \quad (37)$$

$$\mathbf{W}_{SR} = (\mathbf{E}\{\hat{\mathbf{e}}_{SR} \hat{\mathbf{e}}_{SR}^H\})^{-1} \quad (38)$$

式(37)中: $\hat{\mathbf{u}}_{SR} = \text{vec}(\hat{\mathbf{U}}_{SR})$ 为矢量化后的增广主特征矢量, 为 \mathbf{W}_{SR} 个矩阵组成的块对角阵。由 2.1 节的

推导可知式(36)的解为:

$$\mathbf{b} = (\hat{\mathbf{F}}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \hat{\mathbf{F}}_{SR})^{-1} \hat{\mathbf{F}}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \hat{\mathbf{g}}_{SR} \quad (39)$$

易知 \mathbf{W}_{SR} 的第 $N+i$ 个块矩阵为:

$$\mathbf{B}^H \mathbf{E}\{(\mathbf{J}_M \hat{\mathbf{u}}_i^*) (\mathbf{J}_M \hat{\mathbf{u}}_i^*)^H\} \mathbf{B} \approx \mathbf{B}^H \mathbf{J}_M (\mathbf{E}\{\hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H\})^* \mathbf{J}_M \mathbf{B} \approx \frac{\lambda_i \sigma^2}{L(\lambda_i - \sigma^2)^2} \mathbf{B}^H \mathbf{B} \quad (40)$$

与第 i 个块矩阵完全相同。因此得到 \mathbf{W}_{SR} 的近似解:

$$\hat{\mathbf{W}}_{SR} = \mathbf{D}_{SR} \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \quad (41)$$

式中:

$$\mathbf{D}_{SR} = \text{blkdiag}(\mathbf{D}, \mathbf{D}) \quad (42)$$

在得到初始值 $\hat{\mathbf{b}}_0 = \hat{\mathbf{F}}_{SR}^+ \hat{\mathbf{g}}_{SR}$ 的基础上, 通过式(39)和(41)的交替迭代即可优化 \mathbf{b} , 进而更准确地估计出信号的到达角。通过大量实验可知, 设定迭代次数 2~4 次即可保证估计精度, 过多的迭代不能进一步提高精度, 反而会增加计算量。

2.3 改进的 PUMA 算法流程

Step 1 计算数据协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_X = \sum_{t=1}^L \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^H(t)/L$, 并求出增广主特征矢量 \mathbf{U}_{SR} ;

Step 2 根据式(34)和(35)构造矩阵 $\hat{\mathbf{F}}_{SR}$ 和 $\hat{\mathbf{g}}_{SR}$;

Step 3 得到 \mathbf{b} 的初始值 $\hat{\mathbf{b}}_0 = \hat{\mathbf{F}}_{SR}^+ \hat{\mathbf{g}}_{SR}$, 再通过式(39)和(41)的交替迭代优化 \mathbf{b} ;

Step 4 求解式(10)对应的线性方程, 计算出 K 个根 $\{z_i\}_{i=1}^K$, 最后得到入射信号的 DOA 估计 $\hat{\theta}_i = \arcsin\left(-\frac{\lambda}{2\pi d} \angle z_i\right)$ 。

3 算法性能

3.1 测向能力分析

下面对 PUMA 算法和 MPUMA 算法的测向能力进行比较分析。在 PUMA 算法中, \mathbf{b} 由式 $\hat{\mathbf{F}} \mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}$ 确定, 其中 $\hat{\mathbf{F}}$ 是 $(M-K)NK$ 矩阵, 相当于通过 $(M-K)N$ 个方程确定 K 个未知数, 当 $(M-K)N < K$ 时, \mathbf{b} 存在较大的求解误差, 同时, $\hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{F}}$ 将变为奇异矩阵, 导致式(23)无法求解。因此需要满足 $(M-K)N \geq K$, 即最大可分辨信号数 $k_{\max} = \frac{N}{N+1} M$ 。同理, 对于 MPUMA 算法, \mathbf{b} 由式 $\hat{\mathbf{F}}_{SR} \mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}_{SR}$ 确定, 其中 $\hat{\mathbf{F}}_{SR}$ 是 $2(M-K)NK$ 维矩阵, 因此最大可分辨信号数 $k_{\max} = \frac{2N}{2N+1} M$, 相比于 PUMA, MPUMA 算法提高了最大可分辨信号数。上述分析是基于理想条件下的, 在实际环境中, 对于 PUMA 而言当 $(M-K)N < K$ 时, 即使 $\hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{F}}$ 变为奇异矩阵, 仍然可以

通过 $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{F}}^H \hat{\mathbf{W}} \mathbf{F})^{-1} \hat{\mathbf{F}}^H \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{g}}$ 计算出 $\hat{\mathbf{b}}$, 但是此时 $\hat{\mathbf{b}}$ 存在很大的误差, 估计出的 DOA 基本失去了应用价值。同理, 对于 MPUMA 算法, 当 $2(M-K)N < K$ 时也能进行 DOA 估计, 但同样存在很大的误差。

3.2 算法复杂度分析

PUMA 和 MPUMA 需要计算协方差矩阵并进行特征值分解, 其中协方差矩阵的运算量为 M^2L , 特征值分解的运算量为 M^3 。表 1 的运算量针对一次迭代, 在 a 次迭代中, PUMA 的总运算量为 $a(M-K)^2(2M+3N^2K+N^2-K) + aK^3 + M^2L + M^3$, MPUMA 的总运算量为 $a(M-K)^2(2M+12N^2K+4N^2-K) + aK^3 + M^2L + M^3$, 可以看出 MPUMA 的运算复杂度稍高于 PUMA, 但 2 种算法的复杂度在同一数量级上, 因此运算时间差距不大。由此可见, MPUMA 算法利用了更多的数据信息, 能够提高最大分辨信号数, 但没有过多的增加运算量。

表 1 PUMA 和 MPUMA 算法的复杂度比较

算法	主要运算成分	运算次数
PUMA	$(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1}$	$(M-K)^3 + (M-K)^2 M$
	$(\hat{\mathbf{F}}^H \hat{\mathbf{W}} \mathbf{F})^{-1}$	$2(M-K)^2 N^2 K + K^3$
	$\hat{\mathbf{F}}^H \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{g}}$	$(M-K)^2 N^2 (K+1)$
MPUMA	$(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1}$	$(M-K)^3 + (M-K)^2 M$
	$(\hat{\mathbf{F}}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \hat{\mathbf{F}}_{SR})^{-1}$	$8(M-K)^2 N^2 K + K^3$
	$\hat{\mathbf{F}}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \hat{\mathbf{g}}_{SR}$	$4(M-K)^2 N^2 (K+1)$

4 仿真实验

本节通过仿真实验将 MPUMA 与 FBSS^[10]、MEVM^[12]、MODE^[17] 以及 PUMA^[18] 算法进行比较, 以此验证 MPUMA 算法的性能。除 4.1 节需要进行关于迭代次数的仿真外, 其余实验中 MODE、PUMA 和 MPUMA 的迭代次数均设为 3 次。对于 FBSS 算法, 运用 ESPRIT 代替谱搜索进行 DOA 估计, 为方便描述, 在本节中仍称其为 FBSS 算法。假设有 3 个到达角为 $[-5^\circ, 8^\circ, 22^\circ]$ 的信号入射到 10 个阵元构成的均匀线阵上, 入射信号为零均值高斯信号且功率相等, 噪声为零均值高斯白噪声, 均方根误差 RMSE 通过 1 000 次蒙特卡罗实验得到。

4.1 不同迭代次数下的算法性能

假设前 2 个信号相干, 相干系数为 $[1, 0.6e^{j\pi/6}]$, 第 3 个信号独立于前 2 个信号, 快拍数为 100, SNR = 0 dB, 将迭代次数由 1 递增至 20。由图 1 可知: 当迭代次数为 1 次时, PUMA 和 MPUMA 的 RMSE 均很大; 迭代次数为 2~4 次时, RMSE 有明显下降; 再增加迭代次数, 2 种算法的性能均没有显著提

升, 反而会增大运算量。因此在接下来的实验中, 将迭代次数设为 3 次是合理的。

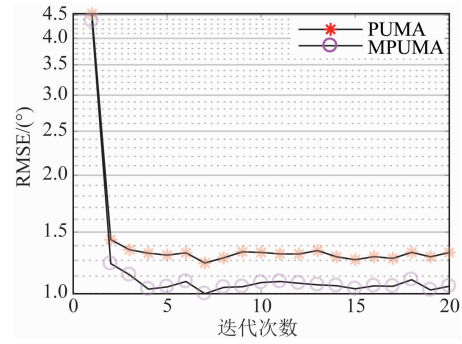


图 1 RMSE 随迭代次数的变化

4.2 不同信噪比条件下的算法性能

除信噪比变化外, 其余实验条件与 4.1 节完全相同, 图 2 为当入射信号部分相干时 RMSE 随 SNR 的变化。可知, 除了当 $SNR < -5$ dB 时, MPUMA 算法的 RMSE 稍高于 MEVM 和 FBSS 算法, 在其余信噪比条件下, MPUMA 算法的 RMSE 均小于其他 4 种算法, 特别是当 $SNR < 0$ dB 时, MPUMA 算法表现出较大优势。相比于 PUMA 算法, 此时 MPUMA 算法的 RMSE 降低了约 0.2° 。

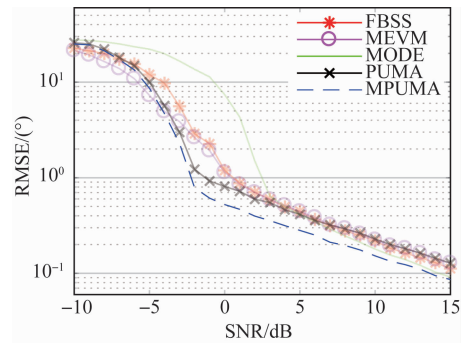


图 2 RMSE 随 SNR 的变化(信号部分相干)

假设信号完全相干, 相干系数为 $[1, 0.6e^{j\pi/6}, 0.5e^{-j\pi/4}]$, 此时 RMSE 随 SNR 的变化见图 3。

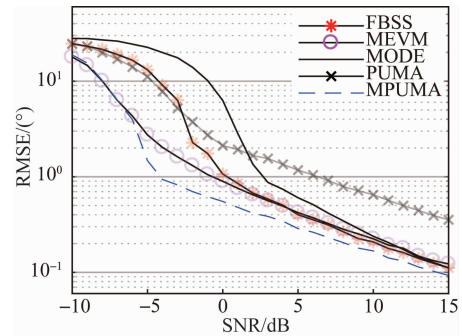


图 3 RMSE 随 SNR 的变化(信号完全相干)

与图 2 相比, FBSS、MEVM 和 MODE 算法的性能基本保持不变, MPUMA 算法的性能在低信噪比条件下得到了改善。而 PUMA 算法的性能则下降严重, 当 $SNR > 5$ dB 时, PUMA 算法的 RMSE

均高于其他算法。这是由于当信号完全相干时, PUMA 算法的主特征矢量的维数 N 减为 1, 此时最大可分辨信号数 $k_{\max} = 5$, 孔径损失严重, 导致其性能恶化。而 MPUMA 算法则仍然保持良好的性能, 且在任何信噪比条件下, 其 RMSE 都低于其他算法。相比于 PUMA 算法, 此时 MPUMA 算法的 RMSE 降低了约 0.8° 。

4.3 不同快拍数条件下的算法性能

图 4 为当入射信号部分相干时 RMSE 随快拍数的变化。假设 $\text{SNR} = 5 \text{ dB}$, 其他条件与 4.1 节相同。由图可知, 当快拍数大于 50 时, FBSS、MEVM、PUMA 以及 MODE 算法的 RMSE 基本相同, 而 MPUMA 算法的 RMSE 均小于其他 4 种算法, 由此可见 MPUMA 算法性能最好。

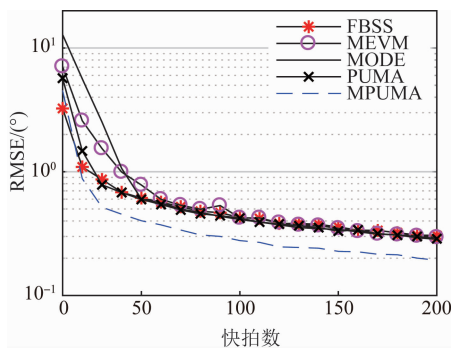


图 4 RMSE 随快拍数的变化(信号部分相干)

如图 5 所示, 当信号完全相干时, MPUMA 算法的性能最好, FBSS 和 MEVM 算法的性能次之, MODE 算法的性能略逊, 而 PUMA 算法的性能最差。与图 4 相比, FBSS、MEVM、MODE 以及 MPUMA 算法的 RMSE 在小快拍数条件下有所下降, 性能得到了提升, 而 PUMA 算法的 RMSE 基本超过了 1° , 性能下降严重。

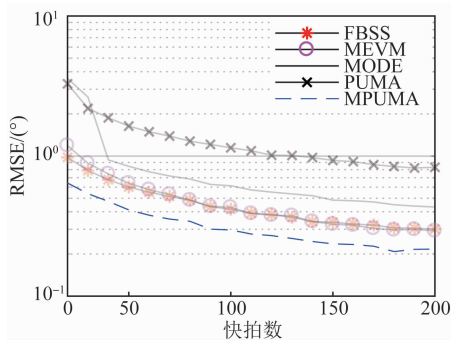


图 5 RMSE 随快拍数的变化(信号完全相干)

4.4 不同角度间隔条件下的算法性能

假设 $\text{SNR} = 5 \text{ dB}$, 快拍数为 100, 前 2 个入射信号的到达角仍为 $[-5^\circ, 8^\circ]$, 第 3 个信号的到达角从 10° 增加到 25° , 取第 2、3 个信号的 DOA 之差为角度间隔, 其他条件保持不变。如图 6 所示, 当入射信号部分相干时, 所有算法的 RMSE 都随着角度间隔的

增大而减小。当角度间隔大于 4° 时, MPUMA 算法的 RMSE 均小于其他算法, 性能最优, 而 MODE 算法的 RMSE 在角度间隔较小时明显高于其他算法, 性能最差, FBSS、MEVM 和 PUMA 算法的性能介于两者之间。

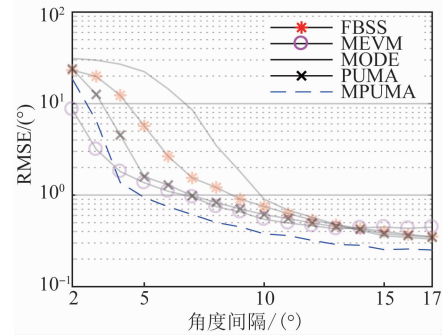


图 6 RMSE 随角度间隔的变化(信号部分相干)

如图 7 所示, 当信号完全相干时, 所有算法的性能都出现了不同程度的下降, 特别是当角度间隔小于 10° 时, 性能下降严重。当角度间隔大于 10° 时, PUMA 和 MODE 算法的性能最差, MPUMA 算法的性能最好。

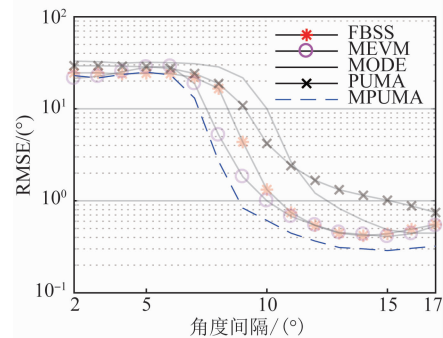


图 7 RMSE 随角度间隔的变化(信号完全相干)

4.5 运算时间比较

保持实验条件与 4.3 节部分相干信号入射时的条件一致, 将阵元数 M 从 6 递增至 25 个, 进行 1 000 次蒙特卡罗实验。图 8 为运算时间随阵元数的变化, 所有算法的运算时间都随着阵元数的增加而增加。

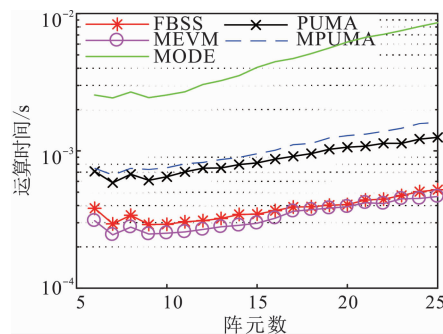


图 8 运算时间随阵元数的变化

当阵元数相同时,运算时间由少到多依次是 MEVM、FBSS、PUMA、MPUMA、MODE。其中 MEVM 和 FBSS 的运算时间约为 5×10^{-4} s, PUMA 和 MPUMA 的运算时间约为 1×10^{-3} s, MODE 算法的运算时间接近 1×10^{-2} s。可见相较于 PUMA 算法, MPUMA 算法的运算量无较大提高。

5 结语

本文提出了一种 MPUMA 算法,进一步提高了测向精度和最大可分辨信号数。该算法在信号完全相干以及信号部分相干条件下都具有良好的性能,并且在低信噪比、小快拍数条件下仍能保持较高的测向精度,算法鲁棒性较强。

参考文献(References):

- [1] 陈金立,李巧雅,李家强. 基于协方差匹配 SLO 算法的 MIMO 雷达 DOA 估计[J]. 雷达科学与技术, 2019,17(1): 19-24.
CHEN J L, LI Q Y, LI J Q. DOA Estimation of MIMO Radar Based on Covariance Matching SLO Algorithm[J]. Radar Science and Technology, 2019, 17(1): 19-24. (in Chinese)
- [2] 李军,林秋华,王凯. 一种水声宽带双曲调频信号波达方向估计方法[J]. 大连理工大学学报, 2018,58(3): 293-301.
LI J, LIN Q H, WANG K. A DOA Estimation Method for Underwater Wideband HFM Signals[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2018,58(3): 293-301. (in Chinese)
- [3] 杨琳莉. 基于 CDMA 信号的 DOA 估计方法研究[D]. 成都:电子科技大学, 2014.
YANG L L. DOA Estimation Method Research Based on CDMA Signals[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2014. (in Chinese)
- [4] 闫锋刚,刘秋晨,邵多. 基于谱分解的降阶求根 MUSIC 算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(10): 2421-2427.
YAN F G, LIU Q C, SHAO D. Reduced-Dimension Root-MUSIC Algorithm Based on Spectral Factorization[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2017,39(10):2421-2427. (in Chinese)
- [5] 吕志丰,雷宏. 基于差值映射的压缩感知 MUSIC 算法[J]. 电子与信息学报, 2015,37(8): 1874-1878.
LYU Z F, LEI H. Compressive Sensing MUSIC Algorithm Based on Difference Map[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2015, 37(8): 1874-1878. (in Chinese)
- [6] 冯明月,何明浩,韩俊,等. 基于协方差拟合旋转不变子空间信号参数估计算法的高分辨到达角估计[J]. 上海交通大学学报, 2017,51(9): 1145-1152.
FENG M Y, HE M H, HAN J, et al. High Resolution Direction of Arrival Estimation Based on Covariance Fitting Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Technique Algorithm[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2017,51(9): 1145-1152.
- [7] 徐保根,谢伟,万义和,等. 一种基于广义特征向量的改进 ESPRIT 测向算法[J]. 电子科技大学学报, 2015,44(2): 201-204.
XU B G, XIE W, WAN Y H, et al. An Improved Esprit Algorithm Based on Generalized Eigenvectors[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2015,44(2): 201-204. (in Chinese)
- [8] 朱进勇,王立冬. 多径信号的相干性及对测向的影响[J]. 微型机与应用, 2016,35(20): 17-20.
ZHU J Y, WANG L D. Coherence of Multipath Signals and its Effect on Direction Finding[J]. Microcomputer & Its Applications, 2016, 35(20): 17-20. (in Chinese)
- [9] SHAN T J. On Spatial Smoothing for Estimation of Coherent Signals[J]. IEEE Transactions on ASSP, 1985, 33(4): 806-811.
- [10] WILLIAMS T R. An Improved Spatial Smoothing Technique for Bearing Estimation in a Multipath Environment[J]. IEEE Transactions on ASSP, 1988, 36(4): 425-432.
- [11] CHOI Y. ESPRIT-Based Coherent Source Localization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(12): 6416-6420.
- [12] 刁鸣,安春莲. 独立信号和相干信号 DOA 估计新方法[J]. 系统工程与电子技术, 2011,33(12):2582-2586.
DIAO M, AN C L. Novel DOA Estimation Method for Independent Signals and Coherent Signals[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011,33(12):2582-2586. (in Chinese)
- [13] YE Z, ZHANG Y, LIU C. Direction-of-Arrival Estimation for Uncorrelated and Coherent Signals with Fewer Sensors[J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2009, 3(3): 473-482.
- [14] XIAO Y L, WEI P, GAN L. Improved Direction-of-Arrival Estimation for Uncorrelated and Coherent Signals in the Presence of Multipath Propagation[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications & Computer Sciences, 2015, 98(3): 881-884.
- [15] STOICA P, ARYE N. MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(5): 720-741.
- [16] STOICA P, SHARMAN K C. Novel Eigenanalysis Method for Direction Estimation[J]. IEE Proc F Radar and Signal Processing, 1990, 137(1): 19-26.
- [17] QIAN C, HUANG L, CAO M, et al. PUMA: An Improved Realization of MODE for DOA Estimation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53(5): 2128-2139.

(编辑:徐敏)

超构表面设计及其应用

王光明, 邹晓鋆, 季文焯, 蔡 通, 李海鹏, 张迟霖,
侯海生, 谢 鹏, 白 昊, 王 焱雨
(空军工程大学防空反导学院, 西安, 710051)

摘要 超构表面作为二维形式的超构材料,在分界面处可以对透射、反射电磁波产生特定的相位分布,因此能够灵活调控电磁波前。超构表面的低剖面二维平面结构,在电磁调控领域具有广泛的应用前景,一系列的超构表面应用应运而生。主要介绍了超构表面的设计发展以及其应用,主要包括天线应用、RCS 减缩、特殊波束、有源超构表面等 4 个方面。首先,在天线应用方面,超构表面可用于实现高增益透镜和极化转换功能;其次,从吸波型和散射调控型 2 种不同工作机理的角度介绍了应用于 RCS 减缩的超构表面;然后,针对特殊波束,主要介绍了超构表面在涡旋波束和全息成像中的应用;最后,从加载不同有源原件的角度分析有源超构表面的发展,并未未来超构表面发展值得深入研究的方向。

关键词 超构表面;天线;RCS 减缩;涡旋传输;全息成像;有源

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2019.06.010

中图分类号 TB34 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2019)06-0061-11

A Meta-Surface Design and Application

WANG Guangming, ZOU Xiaojun, JI Wenye, CAI Tong, LI Haipeng, ZHANG Chiben,
HOU Haisheng, XIE Peng, BAI Hao, WANG Canary
(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: Meta-surfaces regarded as the two-dimensional types of meta-materials can generate specific phase distributions to the transmissive and the reflective electromagnetic waves at the interface enabling to flexibly manipulate wave-fronts. Due to their low-profile and planar structures, the meta-surfaces have wide potentials in the applications of electromagnetic manipulating, and a series of applications arise. This paper mainly introduces the design process of the meta-surfaces and their applications in antennas, RCS reduction, special beams and active regions. Firstly, in the application of antennas, the meta-surfaces can realize high-gain lenses and the polarization converters. Then, the meta-surfaces with different working principles of absorption and scattering controlling are adopted to reduce RCS. And also, the application of special beams mainly include the vortex beam transmission and the holographic imaging. Finally, the active meta-surfaces are introduced from the aspect of loading different active components. Moreover, this paper summaries the future directions of the meta-surface research.

Key words: meta-surfaces; antenna; RCS reduction; vortex beam transmission; holographic imaging; active

收稿日期: 2019-10-17

基金项目: 国家自然科学基金(61871394)

作者简介: 王光明(1964—),男,安徽砀山人,教授,博士生导师,主要从事天线与微波器件、超材料与超表面等研究。E-mail:wgming01@sina.cn

引用格式: 王光明,邹晓鋆,季文焯,等.超构表面设计及其应用[J].空军工程大学学报(自然科学版),2019,20(6):61-71. WANG Guangming, ZOU Xiaojun, JI Wenye, et al. A Meta-Surface Design and Application[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2019, 20(6): 61-71.