第 19 卷第 5 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 19 No. 5
2018 年 10 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Oct. 2018

U^*-逆半群的一些性质

焦红英，蔺向阳
(空军工程大学基础部，西安，710051)

摘要　主要研究了$\mathcal{L}^*$-逆半群的1个子类——U^*-逆半群。首先引入U^*-逆半群的定义，其次证明了半群S为U^*-逆半群的充分必要条件是对任意的$x\in S$，存在唯一的元素$x^0\in H_1^*$，使得$x\leqslant x^0$，并进一步给出了U^*-逆半群是F-富足半群的充要条件是$M=H_1^*$，从而将$\mathcal{L}^*$-逆半群与F-富足半群之间建立了联系。

关键词　$\mathcal{L}^*$-逆半群；U^*-逆半群；F-富足半群

DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2018.05.019

中图分类号　O152.7　　**文献标志码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2018)05-0109-03

Some Properties of U^*-Inverse Semigroups

JIAO Hongying, LIN Xiangyang
(Department of Basic Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: A subclass of $\mathcal{L}^*$-inverse semigroups is in vestigated in this paper, namely, U^*-inverse semigroups. Besides, the paper gives that a semigroup is an U^*-inverse semigroups if and only if for any $x\in S$ there exists a unique element $x^0\in H_1^*$ such that $x\leqslant x^0$. Moreover, the paper proves that an U^*-inverse semigroups is F-Abundant semigroups if and only if, $M=H_1^*$, so that $\mathcal{L}^*$-inverse semigroups and F-Abundant semigroups are connected.

Key words: $\mathcal{L}^*$-inverse semigroups; U^*-inverse semigroups; F-abundant semigroups

从上世纪半群创立以来，随着算子理论，组合数学，模糊数学等学科的不断发展，也在推动半群理论的发展。而在半群理论中，正则半群及其子类的研究一直是半群代数理论的研究热点之一。最早将正则半群推广到富足半群是文献[1]。左逆半群是一类重要的正则半群，这类半群已经被许多学者研究过[2-5]，例如，Bailes 和 Yamada 等等。特别地，Yamad 运用左半直积的方法给出了这类半群的一种构造 EI-Qallali 在文献[6]中引入了$\mathcal{L}^*$-unipotent 半群，进而将左逆半群推广到了富足半群。2006年，任学明，岑嘉评在 Yamada 和 EI-Qallal 的基础上，给出了L^*-逆半群的概念、性质，并建立了$\mathcal{L}^*$-逆半群的结构[7]。在这篇文章中，我们将研究$\mathcal{L}^*$-逆半群的一个子类——U^*-逆半群，并且研究一个半群S是U^*-逆半群的充要条件是对于任意的$x^0\in H_1^*$一定存在一个唯一的元x，使得$x\leqslant x^0$。并且进一步研究U^*-逆半群与F-富足半群之间的关系。

1　预备知识

文中所涉及的符号，请参看 Howie[8]。下面列出一些备用的已知结论。

收稿日期：2018-03-20
基金项目：国家自然科学基金(11071255)；国家级大学生创新训练项目(201490052045)
作者简介：焦红英(1981—)，女，陕西宝鸡人，讲师，博士生，主要从事半群理论，编码理论研究。E-mail：hyjiao12@163.com

引用格式：*焦红英，李瑞虎，蔺向阳. U^*-逆半群的一些性质[J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2018，19(5)：109-111. JIAO Hongying, LI Ruihu, LIN Xiangyang. Some Properties of U^*-Inverse Semi-groups[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2018, 19(5): 109-111.*

引理 1.1[1]　若 S 为半群，对于任意 $a,b\in S$。则下列两款是等价的：

1) $a\mathcal{L}^*b(a\mathcal{R}^*b)$；

2) 对于任意 $x,y\in S^1$，$ax=ay(xa=ya)$ 当且仅当 $bx=by(xb=yb)$。

由**引理 1.1** 可得如下推论：

推论 1.2[1]　若 S 为半群，对于任意 $a,e^2=e\in S$。则下列两款是等价的：

1) $a\mathcal{L}^*(\mathcal{R}^*)e$；

2) $a=ae(a=ea)$ 且对于任意 $x,y\in S^1$，$ax=ay(xa=ya)$，蕴含 $ex=ey(xe=ye)$。

设 S 是富足半群，Lawson 在文献[9]中定义了 S 上的偏序关系如下：

$a\leqslant_l b\Leftrightarrow L^*(a)\subseteq L^*(b)$ 并且存在 $f\in E(S)$ 使得 $a=bf$；

$a\leqslant_r b\Leftrightarrow R^*(a)\subseteq R^*(b)$ 并且存在 $e\in E(S)$ 使得 $a=eb$。

$\leqslant=\leqslant_l\cap\leqslant_r$。

引理 1.3[1]　若 S 为半群，对于任意 $a,b\in S$。则下列两款是等价的：

1) $a\leqslant b$；

2) 存在 $e,f\in E(S)$ 使得 $a=eb=bf$。

因此，我们记这样一个集合 $\omega(e)=\{f\in E\mid f\leqslant e\}$。

容易验证 $\mathcal{L}^*$ 是一个右同余，同时 $\mathcal{R}^*$ 是一个左同余。根据文献[9]，$\mathcal{H}^*=\mathcal{L}^*\cap\mathcal{R}^*$。$L_a^*(R_a^*,H_a^*)$ 表示包含元素 a 的 $\mathcal{L}^*$ 类($\mathcal{R}^*$,$\mathcal{H}^*$ 类)。$E(a)$ 表示半群 S 的幂等元集合。半群 S 的 $\mathcal{L}^*$ 类($\mathcal{R}^*$ 类)幂等元记作 $a^*(a^+)$。

半群 S 称为 $rpp(lpp)$ 半群是指每一个 $\mathcal{L}^*$ 类($\mathcal{R}^*$ 类)包含至少一个幂等元。既是 rpp 半群也是 lpp 半群称为富足半群。一个富足半群被称为 $\mathcal{L}^*$ 一逆半群是指如果 S 是 IC 半群并且半群 S 的幂等元集形成左正则带，即：

$\forall e,f\in E(S)$，$fef=fe$。

一个富足半群 S 称为是幂等元连接的[6]，简称 IC。是指如果 $\forall a\in S$ 并且 $\exists a^+,a^*$，存在双射 θ：$\langle a^+\rangle\to\langle a^*\rangle$ 使得对于所有的 $x\in\langle a^+\rangle$ 有 $xa=a\theta(x)$。其中 $\langle e\rangle(e\in E(S))$ 是半群 S 的子半群记作 $E(eSe)$。

引理 1.4[10]　若 S 为富足半群，则下列两款是等价的：

1) S 是 IC 的；

2) 对于每个 $a\in S$，并且对于某个 $a^*\in L_a^*\cap E(S)$，$a^+\in R_a^*\cap E(S)$，则有下面两条成立：①对于所有 $e\in\omega(a^*)$，存在 $g\in\omega(a^+)$ 使得 $ae=ga$；②对于所有 $f\in\omega(a^+)$，存在 $h\in\omega(a^*)$ 使得 $fa=ah$，其中 $\omega(e)(e\in E(S))=\{f\in E(S):,f=fe=ef\}$。

引理 1.5[10]　若半群 S 为富足半群且 $a,b\in S$，则下列两款是等价的：

1) $a\leqslant b$；

2) 对于每一个 b^+,b^*，存在 $a^+\in\omega(b^+)$，$a^*\in\omega(b^*)$ 使得 $a=a^+b=ba^*$。

假设 S 是含恒等元 1 的富足半群，我们总是记半群 S 的包含 1 的 $\mathcal{H}^*$ 类为 H_1^*。并且对于 $\forall a\in S$ 记：$P(a)=\{b\in S\mid a=ebf,e\mathcal{R}^*a,f\mathcal{L}^*a,e,f\in E(S)\}$ 并且 $U^*(a)=P(a)\cap H_1^*$。

2　主要结论

本节的目的是引入 U^*-逆半群定义并对这类半群的性质和特征进行研究。

定义 2.1　一个带有恒等元 1 的 $\mathcal{L}^*$-逆半群 S^1 被称为是 U^*-逆半群是指如果对于所有的 $x\in S$ 有 $|U^*(x)|=1$。

如果半群 S 为 U^*-逆半群，则定义关系 σ 如下：

$\sigma=\{(a,b)\in S\times S:(\exists e\in E(S))ea=eb\}$。

定义 2.2　半群 S 是逆半群，且 S 的最小群同余 σ 的每个 σ 类中按照自然偏序都包含一个最大元，则称 S 为是 F-逆半群。

引理 2.3　如果半群 S 是 U^*-逆半群，那么下列两款是等价的：

1) $(a,b)\in\sigma$；

2) 存在 $g,h\in E(S)$，使得 $ga=hb$.

证明：(1)⇒(2)显然成立。下证 2)⇒1)

由于存在 $g,h,\in E(S)$，使得 $ga=hb$ 那么有 $gh\cdot ga=gh\cdot hb$，也即 $gh\cdot a=gh\cdot b$，因为 $E(S)$ 是左正则带。取 $e\triangleq gh$，则就有 $e\in E(S)$，使得 $ea=eb$，即 $(a,b)\in\sigma$。

半群 S 上的同余 ρ 称为可消么半群同余是指如果 S/ρ 是可消么半群。众所周知，每一个半群 S 都有最小可消么半群同余，记作 σ。

定理 2.4[11]　如果半群 S 是 U^*-逆半群，那么 σ 是半群 S 上的最小可消么半群同余。

根据文献[12]，富足半群 S 称为 F-富足半群是指如果半群 S 的每一个 σ 类在自然偏序 $\leqslant$ 下有最大元。为了进一步的研究，我们先给出需要的事实：

引理 2.5[11,13]　如果 S 是带恒等元 1 的 $\mathcal{L}^*$-逆半群，并且 $a,x\in S$，使得 $x\in H_1^*$ 且对于某个 $e,f\in E(S)$，有 $a=exf$，那么 $x\in U^*(a)$。

定理 2.6　半群 S 是 U^*-逆半群的充要条件是

对于任意的 $x\in S$，存在唯一元 $x^0\in H_1^*$，使得 $x\leqslant x^0$。

证明：充分性。设 S 为 U^*-逆半群且 $x\in S$，那么存在一个唯一元 $x^0\in U^*(x)$，使得 $x=x^+x^0f$，其中 $x^+\mathcal{R}^*x\mathcal{L}^*f$，对于某个 $f\in E(S)$。根据**引理 1.4**，存在幂等元 $g,h\in E(S)$，使得 $x=x^+x^0f=x^+hx^0=x^0gf$。即 $x\leqslant x^0$。

必要性。假设对于每一个 $x\in S$，存在唯一元 $x^0\in H_1^*$，使得 $x\leqslant x^0$。根据**引理 1.5**，存在幂等元 $e\in\omega((x^0)^+)$，使得 $x=ex^0$。又因为半群 S 是 IC 富足半群，根据**引理 1.4**，有 $x=ex^0=eex^0=ex^0f$，其中 $f\in\omega((x^0)^+)$。再根据**引理 1.4** 可知 $x^0\in U^*(x)$。即 $|U^*(x)|=1$。因此，半群 S 是 U^*-逆半群。

定理 2.7　若半群 S 是 U^*-逆半群，则有：

1）半群 S 是 F-富足半群；

2）对于所有的 $a\in S$，$U^*(a)$ 是 σ_a 中的最大元。

证明：对于任意的 $a\in S$，存在唯一元 $a^0\in U^*(a)$，使得 $a=ea^0f$，其中 $e\mathcal{R}^*a$，$f\mathcal{L}^*a$，且 $e,f\in E(S)$。因为 $a^0\mathcal{H}^*1$，并且 $\omega(1)=B$。根据**引理1.4**，可知存在 $g,h\in B$，使得 $a=eha^0=a^0gf$。因此，$a\leqslant a^0$，并且 $(a,a^0)\in\sigma$。

下证半群 S 是 F-富足半群。对于任意 $b\in\sigma\cap H_1^*$，使得 $ea=eb$ 并且 $b\in H_1^*$，根据**引理 2.5**，可知 $b\in U^*(a)$。又因为半群 S 是 U^*-逆半群，则有 $|\sigma_a\cap H_1^*|=1$。故半群 S 是 F-富足半群。

2）的证明蕴含在 1）的证明过程中。

对于一个 F-富足半群 S，M 是半群 S 的每一个 σ 类中的最大元组成的集合。

定理 2.8　若半群 S 是 F-逆半群[14]，那么 S 是 U^*-逆半群的充要条件是 $M=H_1^*$。

证明：根据**定理 2.7**，充分性显然成立。下证必要性。假设 $M=H_1^*$ 那么对于任意 $x\in S$ 有 $|\sigma_x\cap H_1^*|=1$ 根据 M 的定义可知，存在 $x^0\in H_1^*$，使得 $x\leqslant x^0$。那么存在 $e,f\in E(S)$ 使得 $x=ex^0=x^0f$，因此，$ex=e^2x^0=ex^0$。故 $x^0\in\sigma_x$。结合 $|\sigma_x\cap H_1^*|=1$，我们得到，存在唯一的元素 $x^0\in H_1^*$，使得 $x\leqslant x^0$。因此，根据**定理 2.6** 可知，半群 S 是 U^*-逆半群。

参考文献(References)：

[1] FOUNTAIN J. Abundant Semigroups[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1982, 44(3): 103-129.

[2] GUO X J. Idempotent-Separated Good Congruences on an IC-Quasi-Adequate Semigroup [J]. J Pure Math, 1999,16: 57-65.

[3] NI X F, CHAO H Z. Regular Semigroups with Normal Idempotents [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2017,103(1): 116-125.

[4] THOMAS J ,INDHIRA K ,CHANDRASEKARAN V M. Special Classes of Regular Semigroups [J]. International Journal of Pure & Applied Mathematics, 2017,115(9):11-24.

[5] BLYTH T S,SANTOS M H A. Special Subgroups of Regular Semigroups [J]. Communications in Algebra, 2017,45 (10): 4246 -4256.

[6] EL-QALLALI A, FOUNTAIN J B. Idempotent-Connected Abundant Semigroups[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 1981, 91(1/2): 79-90.

[7] REN X M, SHUM K. The Structure of $\mathcal{L}^*$-Inverse Semigroups[J]. Science in China A, 2006, 49(8): 1065-1081.

[8] HOWIE J M. An Introduction to Semigroup Theory [M]. London: London Academic Press,1976.

[9] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. London: Oxford Science Publications,1995.

[10] LAWSON M V. The Natural Partial Order on an Abundant Semigroup[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1987, 30(2): 169-186.

[11] REN X M and JIAO H Y. U^*-Inverse Semigroups [J]. Scientia Magna,2008,4:63-66.

[12] GUO X J. F-Abundant Semigroups [J]. Glasgow Mathematical Journal, 2001, 43(2):153-163.

[13] ZHANG P G and CHEN Y SH. On Idempotent -Connected Quasi-Adequate Semigroups [J]. Semigroup Forum,2002,65(2):275 -284.

[14] MCFADDEN R, O'CARROLL L . F-Inverse Semigroups [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1971, 22(4): 652-666.

（编辑：姚树峰）