

# Pareto 杂波模型的参数估计性能研究

傅俊滔<sup>1</sup>, 周国安<sup>1</sup>, 陈 红<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学防空反导学院, 西安, 710051; 2. 61769 部队, 山西吕梁, 033000)

**摘要** 对于服从 Pareto 分布的杂波, 采用一二阶矩估计法和  $\langle x \ln(x) \rangle$  估计法存在分布参数的有效估计范围受限的问题。基于  $\langle x^r \ln(x) \rangle$  估计法进行估计, 推导出形状参数的有效估计区间为  $(r, +\infty)$ 。在此基础上, 利用负数阶矩估计的思想进一步提出  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  估计法, 使形状参数的有效估计范围扩大到  $(0, +\infty)$ 。仿真实验表明,  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  估计法将形状参数的有效估计范围扩大到整个取值区间。和其他几种估计法的估计性能相比,  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  估计法的运行速度更快, 在区间  $(0, 1)$  上的估计性能更好, 在实际工作中的应用范围更广泛。

**关键词** Pareto 分布; 杂波; 参数估计; 估计范围

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2018.02.012

**中图分类号** TN957.51 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2018)02-0067-05

## The Performance Study of Parameter Estimation Based on Pareto Clutter Model

FU Juntao<sup>1</sup>, ZHOU Guoan<sup>1</sup>, CHEN Hong<sup>2</sup>

(1. Air and Missile Defence College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;

2. Unit 61769, Lvliang, Shanxi, 033000, China)

**Abstract:** The distribution model of clutter and its parameter estimation have been the focus of radar signal processing. Compared with other distribution models, the radar clutter model in a state of subjection to the Pareto distribution is more dominant when it is fitted with the real clutter. As for clutters subject to the Pareto distribution, the range of effective estimation of the distributed parameters are restricted by adopting first two order moment or  $\langle x \ln(x) \rangle$  estimation method. Therefore, a novel estimation method based on the  $\langle x^r \ln(x) \rangle$  is proposed, and the effective estimation interval of the shape parameter is derived as  $(r, +\infty)$ . On the basis of such as these, an estimation method of  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  is further proposed by using the idea of negative order moment estimation, making the range of effective estimation of shape parameters extend to  $(0, +\infty)$ . The simulation results show that the estimation method of  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  extends the range of effective estimation of shape parameters to the entire range. Compared with other estimators, the estimation method of  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  runs faster and has better estimation performance in the interval  $(0, 1)$ . And the application scope is more extensive in actual work.

**Key words:** Pareto distribution; clutter; parameter estimation; estimation range

**收稿日期:** 2017-09-19

**基金项目:** 国家自然科学基金(61501501)

**作者简介:** 傅俊滔(1994—), 男, 四川泸州人, 硕士生, 主要从事雷达信号处理研究. E-mail: 821823977@qq.com

**引用格式:** 傅俊滔, 周国安, 陈红. 基于 Pareto 杂波模型的参数估计性能研究 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2018, 19(2): 67-71.  
FU Juntao, ZHOU Guoan, CHEN Hong. The Performance Study of Parameter Estimation Based on Pareto Clutter Model [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2018, 19(2): 67-71.

雷达杂波直接影响雷达对目标的检测性能<sup>[1-3]</sup>,因此,杂波的特性是雷达目标检测方法设计的依据之一。由于早期的雷达分辨率很低,雷达杂波幅度统计分布多服从瑞利分布(Rayleigh)<sup>[4]</sup>。随着雷达分辨率的不断提高,杂波幅度分布已经严重偏离了瑞利分布<sup>[5]</sup>。为了更好地拟合实测的杂波数据,对数正态分布、韦布尔分布、K分布等被相继提出<sup>[6]</sup>。近年来对X波段高分辨率海洋杂波的研究表明,Pareto分布是一种更具有优势的统计杂波模型<sup>[7-8]</sup>。因此,对Pareto分布参数进行准确的估计,可以提高在海杂波环境下的目标检测性能<sup>[9]</sup>。

关于单次观测 Pareto 分布模型的参数估计方法,传统的方法有最大似然估计法(Maximum-Likelihood Estimator, MLE)<sup>[10]</sup>,矩估计法(Method of Moment, MoM)<sup>[11]</sup>、基于顺序统计量的线性回归估计法(Order Statistics and Linear Regression, OSLR)<sup>[12]</sup>等等。其中,最大似然估计由于其尺寸参数的估计没有闭合解,需用数值方法寻找零点,使得计算效率较低<sup>[13]</sup>。对于文献[11]中的一二阶矩估计法,在形状参数小于2时 Gamma 函数没有意义,使得对形状参数的估计范围受限。而对于OSLR估计法,需要产生服从 Beta 分布的随机数进行拟合,估计结果具有一定的随机性,从而使估计的可信度降低。

本文通过一种 Pareto 分布模型,在 $\langle x \ln(x) \rangle$ 估计法的基础上<sup>[14]</sup>,采用 $\langle x^r \ln(x) \rangle$ 估计法对服从 Pareto 分布的形状参数进行估计,将形状参数的有效估计范围扩展到大于  $r$  的情形。通过对 $\langle x^r \ln(x) \rangle$ 估计法的进一步分析,将  $r$  的取值范围进一步扩大到负数范围,并令  $r = -1$ ,可以得到 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法。 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法的估计表达式为闭合表达式,可以大大减少计算量,节省时间。同时,解决了以往 Pareto 分布的形状参数估计方法存在有效范围估计受限的问题,扩大了形状参数的有效估计范围,适用范围更广。

## 1 单次观测 Pareto 分布

服从 Pareto 分布的海杂波  $X$  的概率密度函数可以用如下形式<sup>[15]</sup>:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{ab^a}{x^{a+1}}, & x > b, a > 0, b > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $a$ 为形状参数; $b$ 为尺度参数。

它的分布函数如下:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a \quad (2)$$

在式(1)所描述的 Pareto 分布中,形状参数  $a$  决定其图形尾部的下降率,从而决定了分布的整体形状,尺度参数  $b$  决定了其支撑域的起点<sup>[12]</sup>。

## 2 分布参数的估计

### 2.1 基于 $\langle x^r \ln(x) \rangle$ 的估计方法

本节主要是采用 $\langle x^r \ln(x) \rangle$ 估计法的方法来对服从 Pareto 分布的参数进行估计,要得到该估计表达式,首先要求出 Pareto 分布的  $r$  阶原点矩<sup>[16]</sup> $\langle x^r \rangle$ :

$$\langle x^r \rangle = \int_b^\infty x^r f_X(x) dx \quad (3)$$

将式(1)代入式(3),可得:

$$\langle x^r \rangle = \int_b^\infty x^r \frac{ab^a}{x^{a+1}} dx = \frac{ab^r}{a-r}, \quad a > r \quad (4)$$

根据简单的数学运算,可以得到:

$$\frac{\partial \langle x^r \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \int_b^\infty x^r f_X(x) dx}{\partial r} = \int_b^\infty \frac{\partial x^r}{\partial r} f_X(x) dx = \int_b^\infty x^r \ln(x) f_X(x) dx = \langle x^r \ln(x) \rangle \quad (5)$$

再根据式(4),求偏微分 $\partial \langle x^r \rangle / \partial r$ 的计算:

$$\frac{\partial \langle x^r \rangle}{\partial r} = \frac{\partial \left( \frac{ab^r}{a-r} \right)}{\partial r} = \langle x^r \rangle \left( \ln b + \frac{1}{a-r} \right) \quad (6)$$

因此,由式(5)和式(6)联立可得:

$$\frac{\langle x^r \ln(x) \rangle}{\langle x^r \rangle} = \ln b + \frac{1}{a-r} \quad (7)$$

从式(7)中可以看到含有带估计的尺度参数  $b$ ,因此需要计算 $\langle \ln(x) \rangle$ 的表达式:

$$\langle \ln(x) \rangle = \int_b^\infty \ln(x) f_X(x) dx = \ln(b) + \frac{1}{a} \quad (8)$$

由式(7)减去式(8),可得:

$$\frac{\langle x^r \ln(x) \rangle}{\langle x^r \rangle} - \langle \ln(x) \rangle = \frac{1}{a-r} - \frac{1}{a} \quad (9)$$

用样本矩代替总体矩,可以得到:

$$\frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^r \ln(x_i)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^r} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i) = \frac{1}{\hat{a}-r} - \frac{1}{\hat{a}} \quad (10)$$

由式(10)可以得到服从 Pareto 分布的形状参数的估计值 $\hat{a}$ ,从而再根据式(8)进一步得到尺度参数的估计值 $\hat{b}$ :

$$\hat{b} = \exp \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - \frac{1}{\hat{a}} \right] \quad (11)$$

由式(10)和式(11)可以看出,形状参数的估计值 $\hat{a}$ 和尺度参数的估计值 $\hat{b}$ 都可以用闭合表达式来表示,因此大大减少了计算量。此外, $a$ 的取值范围

必须满足  $a > r$  时式(4)才有意义,相比于文献[9]中的有效估计范围已经有了很大的拓展。当  $r$  的值越小时,形状参数  $a$  的估计范围越大。在实际的雷达应用中,为了达到形状参数  $a$  尽可能大这个目的,应该允许  $r$  的值使用小数部分,即满足  $0 < r < 1$ 。当  $r = 1$  时,可以得到采用  $\langle x \ln(x) \rangle$  的估计表达式,即为  $\langle x^r \ln(x) \rangle$  估计法在  $r = 1$  时的特殊情况。

## 2.2 基于 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 的估计方法

根据 2.1 节所得的,基于  $\langle x^r \ln(x) \rangle$  的估计法在形状参数  $a \leq r$  时,是不能够进行有效的估计,此时的表达式是没有意义的。由于形状参数  $a$  的取值范围是  $a > 0$ ,因此,只要将  $r$  的取值范围扩展到负数范围,即当  $r < 0$  时,就可以使形状参数  $a$  的取值范围由  $a > r$  变为  $a > 0$ 。此时,该估计法对形状参数  $a$  的估计将不受到范围的限制,同理,尺寸参数  $b$  也一样。

当  $r < 0$  时,由式(4)、式(5)和式(6)重写可得:

$$\frac{\langle x^{-|r|} \ln(x) \rangle}{\langle x^{-|r|} \rangle} = \ln b + \frac{1}{a + |r|} \quad (12)$$

最后,当  $r < 0$  时,由式(8)减去式(12),可得:

$$\langle \ln(x) \rangle - \frac{\langle x^{-|r|} \ln(x) \rangle}{\langle x^{-|r|} \rangle} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a + |r|} \quad (13)$$

由于当  $r < 0$  时,式(13)均成立,为了使表达式简单,同时方便与其他估计法进行比较,可以使  $r$  取特定值,令  $r = -1$ 。这样不仅不影响检验此类估计法的效果,而且大大简化了计算量。此时的估计表达式为:

$$\langle \ln(x) \rangle - \frac{\langle x^{-1} \ln(x) \rangle}{\langle x^{-1} \rangle} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \quad (14)$$

用样本矩代替总体矩可以得到:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{-1} \ln(x_i)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{-1}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \quad (15)$$

由式(15)可以得到服从 Pareto 分布的形状参数的估计值  $\hat{a}$ , 尺度参数的估计值  $\hat{b}$  与之前一样,见式(11)。

由式(15)和式(11)可以看出,形状参数的估计值  $\hat{a}$  和尺度参数的估计值  $\hat{b}$  依然是闭合表达式,计算量不大,利于工程实现。此外,将  $\langle x^r \ln(x) \rangle$  估计法与  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  进行比较,  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  的估计法将形状参数  $a$  的有效估计范围增大到  $a$  的整个取值定义范围,即  $a \in (0, +\infty)$ ,解决了之前形状参数  $a$  的有效估计范围受限的问题。同理,尺寸参数  $b$  的有效估计范围也一样。

## 3 估计性能分析

为了得到估计法对形状参数的估计精度,分析该估计法的性能,需要在 MATLAB 中进行仿真分析。首先,需要在 MATLAB 中产生已知形状参数  $a$  和尺寸参数  $b$  的 Pareto 分布随机数的命令<sup>[17]</sup>:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \text{exprnd}_i \left( \frac{1}{\text{gamrnd}(a, 1/b, 1, M)} \right)$$

式中:  $N$  为积累的个数;  $M$  为样本总数;  $\mathbf{x}$  为 1 个  $1 \times M$  的向量;  $\text{exprnd}$  是用来生成指数分布的命令;  $\text{gamrnd}$  是用来生成 Gamma 分布的命令。图 1 为 MATLAB 产生的服从 Pareto 分布的随机数和理论上的概率密度曲线,可以看出它们之间的拟合程度比较高,可以用于仿真分析。

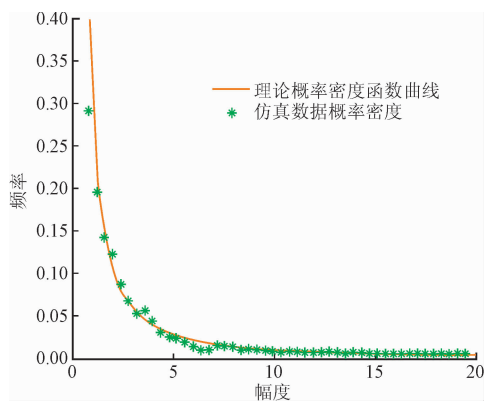


图 1 数据统计分布

Fig. 1 The distribution statistics

在实验中,取  $a$  的区间范围为  $(0.01, 6)$ , 步长为  $0.02$ ,  $b$  为定值,对每一个递进中的  $a$ ,进行 1 000 次仿真实验,可以得到 1 000 个对应的形状参数估计值,然后对其平均数。由于每台计算机的性能都不相同,本文用相对估计时间来对比不同估计器之间所需的估计时间。表 1 给出了同一台计算机上 3 种不同估计法的相对估计时间,以一二阶矩估计法的估计时间为基准。可以看出,  $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$  估计法运行时间比其他 2 种估计法的运行时间短很多,而一二阶矩估计法和  $\langle x \ln(x) \rangle$  估计法的运行时间几乎相同。

表 1 相对估计时间对比

Tab. 1 The comparison of relative estimation time

算法	相对估计时间
一二阶矩	1
$\langle x \ln(x) \rangle$	1
$\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$	0.52

估计法的性能可通过估计值与真实值之间的相

对估计偏差以及相对估计方差来衡量。相对估计偏差用 $(\hat{a}-a)/a$ 来表示。图2对比了3种不同估计法的相对估计偏差性能,可见 $\langle x \ln(x) \rangle$ 估计法与 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法的估计性能优于一二阶矩估计法,并随着 $a$ 减小而越来越明显。此外,对比估计法 $\langle x \ln(x) \rangle$ 和 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法, $a$ 越趋近于零, $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法的相对估计偏差越明显地优于 $\langle x \ln(x) \rangle$ 估计法,这是由于 $\langle x \ln(x) \rangle$ 估计法在 $a \leq 1$ 时没有意义,此时估计无效,得到的估计结果不能让人信服,这些都与理论推导的结果一致。

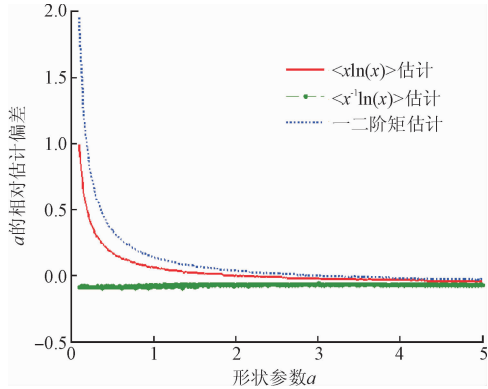


图2 相对估计偏差对比

Fig. 2 The comparison of relative estimation bias

相对估计方差用 $\text{var}(\hat{a})/a^2$ 来表示。图3将3种不同估计法的相对估计方差性能进行对比。同样的,估计法与 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法的相对估计方差小于一二阶矩估计法的相对估计方差。当形状参数的大小越趋于零时, $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法的相对估计方差越明显地优于其它2种估计法,估计性能的优势逐渐凸显出来。

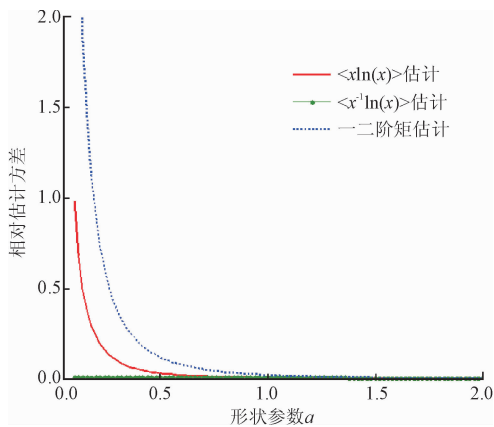


图3 相对估计方差对比

Fig. 3 The comparison of relative estimation variances

## 4 结语

一二阶矩估计法和 $\langle x \ln(x) \rangle$ 估计法对形状参数的估计范围限制较大,因此,在利用 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$

估计法对形状参数估计范围进行拓展的基础上,进一步提出了 $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法,将形状参数的估计范围扩大到整个形状参数的取值范围。实验表明, $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法所需要的运行时间明显小于其他几种估计法的运行时间。此外, $\langle x^{-1} \ln(x) \rangle$ 估计法不仅在取值范围上大于其他几种估计法,而且在区间 $(0,1)$ 上的估计性能也远好于其他几种估计法的估计性能。

## 参考文献(References):

- [1] 丁鹭飞, 耿富录, 陈建春. 雷达原理 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2014: 7-10.  
DING L F, GENG F L, CHEN J C. Radar Principles [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2014: 7-10. (in Chinese)
- [2] 张玉石, 许心瑜, 尹雅磊, 等. L波段小擦地角海杂波幅度统计特性研究 [J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1044-1048.  
ZHANG Y S, XU X Y, YIN Y L, et al. Research on Amplitude Statistics of L-Band Low Grazing Angle Sea Clutter [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(5): 1044-1048. (in Chinese)
- [3] 顾华玉, 尹庆民, 陆志峰. 广义 Bate-Pareto 分布的参数估计研究 [J]. 统计与决策, 2014, 30(23): 12-16.  
GU H Y, YIN Q M, LU Z F. Parameter Estimation of Generalized Bate-Pareto Distribution [J]. Statistics & Decision, 2014, 30(23): 12-16. (in Chinese)
- [4] 高远, 张扬. 海杂波的 K-分布建模与仿真 [J]. 电子科技, 2007(9): 52-55.  
GAO Y, ZHANG Y. Modeling and Simulation of Sea Clutter by K-Distribution [J]. Electronic Science And Technology, 2007(9): 52-55. (in Chinese)
- [5] 胡文琳, 王永良, 王首勇. 基于  $z \sim r \log(z)$  期望的 K 分布参数估计 [J]. 电子与信息学报, 2008, 30(1): 203-205.  
HU W L, WANG Y L, WANG S Y. Estimation of the Parameters of K-distribution Based on  $z \sim r \log(z)$  Expectation [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, 30(1): 203-205. (in Chinese)
- [6] 王颖, 毛二可, 韩月秋. 相关 K 分布杂波的建模与仿真 [J]. 信号处理, 1997, 13(2): 141-146.  
WANG Y, MAO E K, HAN Y Q. Modeling and Simulation of Correlated K-Distribution Clutter [J]. Journal Signal of Processing, 1997, 13(2): 141-146. (in Chinese)
- [7] FARSHCHIAN M, POSNER F L. The Pareto Distribution for Low Grazing Angle and High Resolution X-Band Sea Clutter [C]// IEEE Radar Conf, Arling-

- ton, VA, USA, 2010: 789-793.
- [8] 任雪婷,贺兴时. 基于强度 Pareto 的自适应多目标差分进化算法[J]. 纺织高校基础科学学报, 2016, 29(3):402-406.  
REN X T, HE X S. An Adaptive Multi-objective Differential Evolution Algorithm Based on the Strength of the Pareto [J]. Basic Sciences Journal of Textile University, 2016, 29(3): 402-406. (in Chinese)
- [9] 丁昊,李建忠,安昕. 实测海杂波数据的多普勒谱特性[J]. 雷达科学与技术, 2012, 10(4):400-420.  
DING H, LI J Z, AN X. Doppler Spectra Property of Measured Sea Clutter Data [J]. Radar Science and Technology, 2012, 10(4):400-420. (in Chinese)
- [10] BALLERIA, NEHORAI, WANG J. Maximum Likelihood Estimation for Compound-Gaussian Clutter with Inverse-Gamma Texture [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(2): 775-780.
- [11] BOCQUET S. Closed-Form Parameter Estimators for Pareto Distributed Clutter with Noise [J]. IET Electronics Letters, 2015, 51(23): 1924-1962.
- [12] WEINBERG G V. Estimation of Pareto Clutter Parameters Using Order Statistics and Linear Regression [J]. IET Electronics Letters, 2013, 49(13): 201-216.
- [13] 李宽,罗丰. 基于实测海杂波数据的统计特性分析[D]. 西安:西安电子科技大学, 2013.  
LI K, LUO F. Analysis of Sea Clutter Statistical Characteristics Based on Acquired Radar Data [D]. Xi'an: Xidian University, 2013. (in Chinese)
- [14] BOCQUET S. Simulaton of Correlated Pareto Distributed Sea Clutter [C]// International Conference on Radar, Adelaide, 2013: 258-261. Doi: 10.1109/RADAR. 2013.6651995.
- [15] KRISHNAMO O, K. Handbook of Statistical Distributions with Applications [M]. Londong: Chapman and Hall, 2006.
- [16] AMAR M. K-Clutter Plus Noise Parameter Estimation Using Fractional Positive and Negative Moment [J]. Aerospace and Electronic Systems, 2016, 52(2): 960-967.
- [17] MEZACHE A, CHALABI I, SOLTANI F, et al. Estimating the Pareto Plus Noise Distribution Parameters Using Non-Integer Order Moments and  $[\varepsilon \log(z)]$  Approaches [J]. IET Radar Sonar & Navigation Iet, 2015, 10(1): 192-204.

(编辑:徐敏)

\*\*\*\*\*

(上接第 66 页)

- [11] 田炜,任新成,郭立新. 海面与其上方双矩形截面柱复合散射的混合算法研究 [J]. 物理学报, 2015, 17(64): 174101-174107.  
TIAN W, REN X C, GUO L X. Study on Composite Electromagnetic Scattering from the Double Rectangular Cross-section Columns above Rough Sea Surface Using Hybrid Method [J]. Acta Phys Sin, 2015, 17(64): 174101-174107. (in Chinese).
- [12] 郭立新,王蕊,吴振森. 随机粗糙面散射的基本理论和方法 [M]. 北京:科学出版社, 2010: 199.  
GUO L X, WANG R, WU Z S. Basic Theory and Method of Electromagnetic Scattering from Random Rough Surface [M]. Beijing: Science Press, 2010: 199. (in Chinese)
- [13] JAKOBUS U, LANDSTORFER F M. Improvement of the PO-MOM Hybrid Method by Accounting for Effects of Perfectly Conducting Wedges-Reply [J]. IEEE Trans Antennas Propag, 1995, 45(10): 1123-1129.
- [14] JAKOBUS U, LANDSTORFER F M. Improved PO-MM Hybrid Formulation for Scattering from Three-dimensional Perfectly Conducting Bodies of Arbitrary Shape [J]. IEEE Trans Antennas Propag, 1995, 43(1): 162-169.
- [15] 孔金欧,著. 电磁波理论[M]. 吴季,译. 北京:电子工业出版社, 2003: 286-288.  
KONG J O. Electromagnetic Wave Theory [M]. WU J, Translated, Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003: 286-288 (in Chinese)

(编辑:徐敏)