

重要性采样的最大似然多径信道估计算法

何启亮, 许华

(空军工程大学信息与导航学院, 西安, 710077)

摘要 提出了一种基于重要性采样方法的最大似然多径信道估计方法。该方法将时延与幅度估计解耦, 利用蒙特卡罗算法(MC)对未知参数的分布函数抽样, 计算样本均值直接得到多径时延和幅度估计结果, 避免了耗时较长的多维网格搜索和对初值较为敏感的迭代算法。仿真结果表明, 对于多径路数分别为5、15的情况, 均能获得较好的信道估计。相比于现有的其他一些算法, 该算法不仅能够同时获得时间延迟估计, 同时也能对幅度精确估值。

关键词 时延; 幅度; 最大似然; 重要性采样

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2015.06.010

中图分类号 TN911.7 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2015)06-0046-05

Research on an Importance-Sampling-Based Maximum Likelihood Time Delay and Amplitude Estimator in Multipath Environments

HE Qiliang, XU Hua

(Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: Based on the importance sampling (IS), this paper proposes a new algorithm to estimate the time delay and amplitude in multipath channels. This algorithm decouples the time delay and amplitude estimation and utilizes Monte Carlo method for sampling unknown parameters. By so doing the parameters are approximated by the average of samples, and the estimator proposed in this paper avoids the complex multidimensional grid search and iterative methods which depend seriously on the initial guess. The results show that the algorithm performs well under condition of respective multi-paths 5, 15. Compared with some other known algorithms under the same condition, the algorithm can achieve not only the time delay estimation, but also a precision amplitude estimation simultaneously.

Key words: time-delay; amplitude; maximum likelihood (ML); importance sampling (IS)

多径信道的信道估计无论是在常规数字通信系统还是在 OFDM(Orthogonal Frequency Division Multiplexing)信号解调处理中都具有非常重要的意义, 它能够为恶劣信道条件下完成高质量的通信提供必要的信息支撑, 例如能够为信道均衡特别是 Turbo 均衡处理^[1-2]以及 RAKER 接收提供重要的信道参数信息。另外, 多输入多输出(MIMO)系统

接收信道均衡和相关检测也都需要精确的信道状态信息。

传统的信道估计采用 RLS 等经典的自适应信号处理方法估计信道冲激响应, 但是估计精度受噪声的影响非常严重; 而基于迭代处理的 EM 算法则严重依赖于初始值的准确性^[3]。目前广泛研究的一类利用信道稀疏性的信道估计方法, 在稀疏信道中

收稿日期: 2015-04-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61001111)

作者简介: 何启亮(1987-), 男, 山东菏泽人, 硕士生, 主要从事电子对抗研究. E-mail: he709679378@163.com

引用格式: 何启亮, 许华. 重要性采样的最大似然多径信道估计算法[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2015, 16(6): 46-50. HE Qiliang, XU Hua. Research on an Importance-Sampling-Based Maximum Likelihood Time Delay and Amplitude Estimator in Multipath Environments[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2015, 16(6): 46-50.

性能良好,但难以适合于多径密集的情况^[4-6]。基于粒子滤波技术的信道估计方法^[1],具有比线性信道估计更好的误码性能,但是仅适用于 OFDM 系统;文献[7]将 LMS 中加入梯度导引似 p 范数约束,使得传统的自适应信道估计算法具有适应不同稀疏度信道的能力,但是这种方法未能从根本上改变 LMS 算法收敛速度慢、受噪声影响大等问题。

时延估计是现代信号处理中备受关注的热点,经典处理方法是 Bell 等人提出的匹配滤波技术^[8],这类方法的精度受限于采样分辨率。MUSIC 算法^[9]将多径时延估计问题在频域等效成正弦频率估计问题,可获得较高分辨率的估计算法,但其性能仅限于在频谱平坦或近似平坦的情况下较优。ML^[10]准则的多径时延估计方法,可以实现时延的高分辨率估计,且对信号形式也没有附加要求,但是点处理过程涉及复杂的多维优化问题。Feder 等人提出了基于 ML 准则的 EM 算法^[11-12],将多维优化的复杂问题分解成一系列一维优化问题的迭代,但是它对初值非常敏感,且难以精确初始化。本文采用蒙特卡罗^[13-14]重要性采样求解函数最优解。

1 信号模型

用参数 α_i 和 τ_i 分别表示第 i 条传播路径的增益系数和时间延迟,它们分别组成向量 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p]$ 、 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_p]$ 。对接收信号离散采样得到:

$$y(nT_s) = \sum_{i=1}^P \alpha_i x(nT_s - \tau_i) + w(nT_s), n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中: $y(nT_s)$ 为接收信号采样序列; $x(nT_s)$ 为发射信号采样序列; P 为总的多径个数。并对采样序列 y 进行离散傅里叶变换(DFT),可以得到:

$$Y(k) = \sum_{i=1}^P \alpha_i X(k) e^{-\frac{j2\pi k \tau_i}{N}} + W(k) \quad (2)$$

将式(2)转化为向量形式为:

$$\mathbf{Y} = \Phi_a(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{W} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{Y} = [Y(0), Y(1), \dots, Y(N-1)]^T$; 复高斯白噪声 $\mathbf{W} = [W(0), W(1), \dots, W(N-1)]^T$ 。矩阵 $\Phi(\boldsymbol{\tau})$ 仅与参数 $\boldsymbol{\tau}$ 有关,即 $\Phi(\boldsymbol{\tau}) = [\varphi(\tau_1), \varphi(\tau_2), \dots, \varphi(\tau_p)]$ 。

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau_i) = [X(0), X(1)e^{-\frac{j2\pi\tau_i}{N}}, \dots, X(N-1)e^{-\frac{j2\pi(N-1)\tau_i}{N}}]^T$$

$[X(0), X(1), \dots, X(N-1)]$ 为发射信号的采样序列。进而,构建 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的似然函数:

$$\Lambda(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}) \propto L(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}) =$$

$$\frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{Y} - \Phi_a(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\alpha})^H (\mathbf{Y} - \Phi_a(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\alpha})\right\} \quad (4)$$

式中: $L(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})$ 为 \mathbf{Y} 的概率密度函数; σ^2 为噪声功率的方差。因此,为求参数的最优估计值,可以通过求式(4)的最大值。

2 信道估计算法

$L(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})$ 是关于参数 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 联合的非线性函数,且是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的二次函数,较难直接求解。可以先将量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 做去耦处理。 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于参数 $\boldsymbol{\tau}$ 的估计值的解析式可以通过求偏导的方法得到。即假设在 $\boldsymbol{\tau}$ 已知的情况下, $\boldsymbol{\alpha}$ 的估计值为:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg[\max(L(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}) = \ln\{\Lambda(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})\})] \quad (5)$$

将式(4)代入式(5)得:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\tau}) = (\Phi_a^H(\boldsymbol{\tau}) \Phi_a(\boldsymbol{\tau}))^{-1} \Phi_a^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{Y} \quad (6)$$

将式(5)中的 \boldsymbol{a} 用近似值 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 代替,化简并取对数,得到估计时延 $\boldsymbol{\tau}$ 的简化似然函数:

$$L_c(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{Y}^H \Phi_a(\boldsymbol{\tau}) (\Phi_a^H(\boldsymbol{\tau}) \Phi_a(\boldsymbol{\tau}))^{-1} \Phi_a^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{Y} \quad (7)$$

根据 Pincus 的全局最大化算法^[13],参考文献[14]的解决方法。其基本思想如下:如果函数 $f(x)$ 存在全局最大点且在这点的值是正数,则最大值点可近似为:

$$\hat{x}_i = \frac{\int \dots \int x_i \exp\{\rho_0 f(\mathbf{x})\} d\mathbf{x}}{\int \dots \int \exp\{\rho_0 f(\mathbf{y})\} d\mathbf{y}}, i = 1, 2, \dots, M \quad (8)$$

假设定义 $\exp(\rho_0 f(\mathbf{x}))$ 的归一化函数为:

$$f'(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{\rho_0 f(\mathbf{x})\}}{\int \dots \int x \exp\{\rho_0 f(\mathbf{x})\} d\mathbf{x}}$$

则函数 $f'(\mathbf{x})$ 被认为是 \mathbf{x} 的伪概率密度函数且满足 $\int \dots \int x f'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$,此时可认为该概率密度函数是 \mathbf{x} 的最佳估计值。即:

$$\hat{x}_i = \int \dots \int x f'(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, i = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

针对本问题的简化似然函数 $L(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})$ 的最大化问题,全局最大估计为:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_i = \int \dots \int \tau_i L_{c, \rho_0}(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \quad (10)$$

式中: $L_{c, \rho_0}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\exp\{\rho_0 L_c(\boldsymbol{\tau})\}}{\int \dots \int \tau_i \exp\{\rho_0 L_c(\boldsymbol{\tau})\} d\boldsymbol{\tau}}$ 是 P 维的

函数 $\exp\{\rho_0 L_c(\boldsymbol{\tau})\}$ 构造的伪概率密度函数。

实际上,当 ρ_0 趋向于无穷大时, $L'_{c, \rho_0}(\boldsymbol{\tau})$ 在全局最大值点呈现出一个 P 维的 Dirac-delta 函数。因此, $\boldsymbol{\tau}$ 的最佳估计值可由式(10)计算得到。但是,由于式(10)为多重积分且比较复杂,因此是很难直

接通过计算得到的。

针对此问题,可以利用 $L'_{c,\rho_0}(\tau)$ 生成 R 个 τ 的样本,由大数定理可知,当 R 趋向无穷大时,样本均值逼近真实积分。因此我们可以用简单的样本均值 $\hat{\tau} = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \tau_k$ 代替式(10)的复杂积分。显而易见,随着 R 的增大,样本均值的方差越小, $\hat{\tau}_i$ 也更加逼近于简化似然函数的最佳估计值。然而, $L'_{c,\rho_0}(\tau)$ 是参数 τ 的非线性函数,而且需要在多维样本空间中实现,因此由该函数产生多维非线性随机数是很难的。针对此问题,采用重要性采样方法,可构造另一个容易产生的样本概率密度函数 $p'(\tau)$ 。从 $p'(\tau)$ 获得 τ 的 R 个样本,式(10)便可以从下面的样本平均来逼近。

$$\int \dots \int \tau L'_{c,\rho_0}(\tau) d\tau = \int \dots \int \tau \frac{L'_{c,\rho_0}(\tau)}{p'(\tau)} p'(\tau) d\tau \approx \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \tau \frac{L'_{c,\rho_0}(\tau)}{p'(\tau)} \quad (11)$$

这里一个重要的问题是如何选取重要性采样函数 $p'(\tau)$ 。它直接影响着估计的准确性和计算量。

通过文献[16-18],可以得到选择好的重要性函数的解决方法:

由于简化似然函数包含矩阵求逆项 $(\Phi^H(\tau)\Phi_a(\tau))^{-1}$,而统计验证表明,矩阵 $(\Phi^H(\tau)\Phi_a(\tau))^{-1}$ 上的非对角线上的值要远小于其对角线上的值,因此可以将 $\Phi^H(\tau)\Phi_a(\tau)$ 近似为对角矩阵,从而避免复杂的运算。即:

$$[\Phi^H(\tau)\Phi_a(\tau)] \approx \left(\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \right) \mathbf{I}_P \quad (12)$$

式中: \mathbf{I}_P 为 $P \times P$ 的单位矩阵。此时,定义重要性函数为:

$$p(\tau) = \prod_{i=1}^P \exp \left\{ \frac{\rho_1}{\sigma^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \right)} \mathbf{I}(\tau_i) \right\} \quad (13)$$

$$I(\tau_i) = \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(k) * Y(k) \exp \left\{ \frac{j2\pi(k-1)\tau_i}{N} \right\} \right|^2$$

这里 ρ_1 为不同于 ρ_0 的常数。其归一化为:

$$p'(\tau) = \frac{\prod_{i=1}^P \exp \left\{ \frac{\rho_1}{\sigma^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \right)} \mathbf{I}(\tau_i) \right\}}{\int \dots \int \prod_{i=1}^P \exp \left\{ \frac{\rho_1}{\sigma^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \right)} \mathbf{I}(\tau_i) \right\} d\tau} \quad (14)$$

多径时延估计 τ 就可以由下式给出:

$$\hat{\tau}_i = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^R \tau_k(i) \frac{L'_{c,\rho_0}(\tau)}{p'(\tau)} \quad (15)$$

将得到的参数 τ ,代入式(6)进行幅度估计,即

$$\hat{\alpha} = (\Phi_a^H(\tau)\Phi_a(\tau))^{-1} \Phi_a^H(\tau)Y \quad (16)$$

得到关于参数 α 的 P 个估计值。相比于联合估计方法,此算法通过将待估参数解耦,大大降低了算法计算量。

3 结果分析与讨论

3.1 总体性能分析

本文运用该算法的估值性能,针对高斯白噪声下的 8PSK 信号进行仿真分析。为了更好的对新算法性能做出评价,本文将该算法与 EM 算法 CS (compressed sensing)算法的计算结果以及 RLS 算法进行了比较分析。其中参数设置如下:样本数为 $N = 100$, ρ_0 和 ρ_1 分别设置 25 和 6,多径数 P 分别设为 5 和 15。采样间隔 $T_s = 1 \times 10^{-4} s$, SNR 的变化范围为 -5 dB 到 25 dB, $R = 1000$,并采用 500 次 Monte Carlo 仿真的平均来计算估计的均方误差 (MSE)。

其中,信道估计的 MSE 由下式计算:

$$MSE = E \left[\sum_{k=0}^{N-1} |H_k - \hat{H}_k|^2 / \sum_{k=0}^{N-1} |H_k|^2 \right] \quad (17)$$

式中: \hat{H}_k 是算法得到的参数估计值; H_k 为真实值。

图 1(a)和(b)分别为本文算法在多径数 P 取 5 和 15 时的信道估计结果示意图。由图可见,该算法在多径数稀疏或者多径数密集时都能较为准确估计出信道系数。

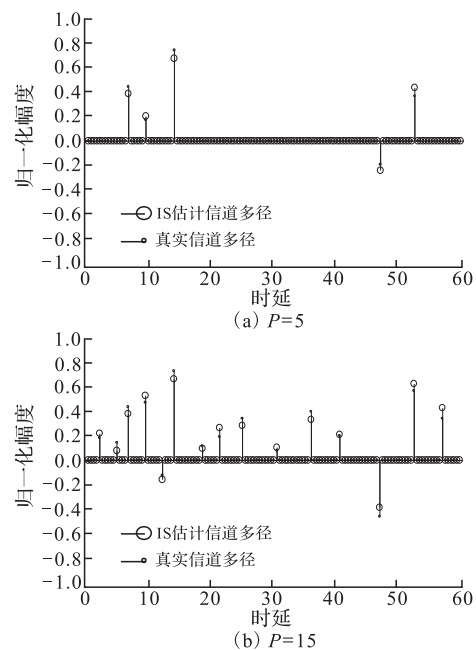


图 1 不同多径数 IS 算法估计结果和实际信道响应对比
Fig.1 Response comparison between IS estimation and actual channel response with different multipath numbers

本文在多径数 P 取不同值的情况下,运用不同算法分别对多径信道稀疏时和多径信道密集时做了比较分析。当多径数 P 设为 5 时,传统的 RLS 算法有较高的 MSE,而 EM 算法在信噪比超过 15 dB 时也表现出较好的性能,见图 2(a)。但是,与 IS 和 CS 2 个算法相比,它只是次优化。IS 和 CS 算法在整个 SNR 的比较范围内,都比 RLS 和 EM 算法的 MSE 要低出很多。从图 2(a)中可以看出,当 SNR 较低时,IS 算法较 CS 算法表现出更好的性能,大约提升了 1 dB。随着 SNR 的增大,CS 算法也逐步体现出在稀疏多径信道条件下优越的估计性能,与本文 IS 算法的性能逐渐一致。从而证明了本文所提的算法对稀疏多径信道有更良好的估计性能,并且相比于 EM 算法,本文摆脱了对初始值的依赖。从图 2(b)可以看出,当多径数 P 设为 15 时,此时多径信道较为密集,在整个 SNR 范围内,IS 算法较 CS 算法有着更优的表现,性能大约提升 2 dB。

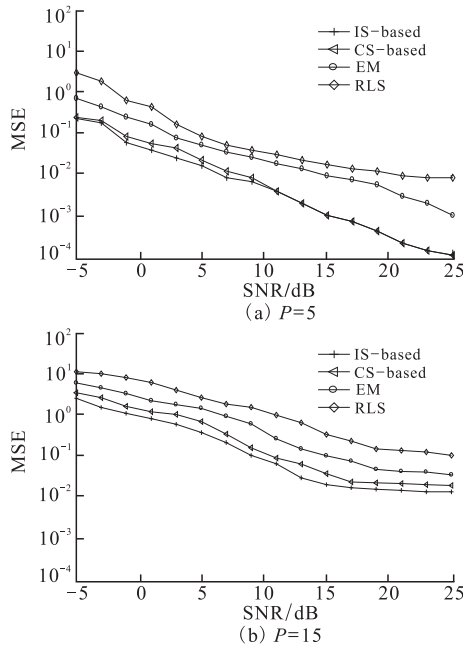


图 2 不同多径数 IS 算法与其它算法之间的性能比较
Fig.2 Performance comparison between different algorithm with different multipath numbers

3.2 参数对算法性能的影响

由上文推导过程可以看出, ρ_0 、 ρ_1 对估值的准确度和计算量有着重要影响。一般来说,当参数 ρ_0 趋向于无穷大时,简化似然函数呈现 P 维的 Dirac-delta 函数形状,使全局最大值和其它极值点有明显的区别。实际上,如果当函数的全局最大点和其它极值点已经分开,则 ρ_0 的取值不必太大;否则只有 ρ_0 较大时,才能满足计算要求。参数 ρ_1 能够保证重要性采样函数与最大函数形状的类似程度,并且描

述的伪概率密度函数具有“重尾”特性,不宜取太大。

图 3 给出了多径数 $P = 3$, 其它参数设置不变时,参数 ρ_0 和 ρ_1 的选取对算法的估计性能的影响。从图 3(a)可以看出,估值的均方误差(MSE)随着 ρ_0 的增大,先缓慢减小,后迅速下降,并随着 ρ_0 的继续增大几乎保持不变。这表明,当全局最大点和其它极值点已经分开,此时的 ρ_0 的取值已经能够满足计算要求,继续增大 ρ_0 对结果改善不大。从图 3(b)可以看出,随着 ρ_1 的增大,估值标准差先缓慢变化,后迅速增加,并在之后随着 ρ_1 的继续增大几乎保持不变。这说明,当 ρ_1 的值过大时,会导致算法性能急剧变差,可能会导致某些延时峰消失。从图中可以看出, ρ_0 的最佳取值范围是大于 18,而 ρ_1 的最佳取值范围在 2~7。

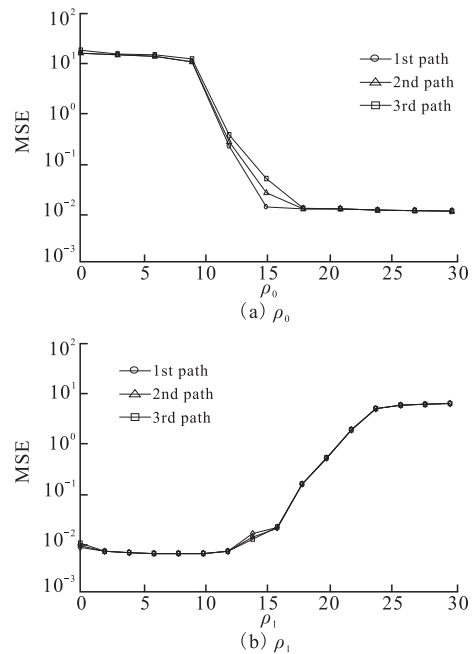


图 3 参数 ρ_0 与 ρ_1 对算法性能的影响曲线
Fig.3 The curve of ρ_0 and ρ_1 on estimation performance

4 结语

针对多径环境下的信道估计算法问题,本文提出了基于重要性采样的最大似然估计算法,根据参数的最大似然估计,构建时延和幅度的似然函数,并将幅度表示为时间延迟函数构建成时延估计的简化似然函数。针对简化似然函数采用了重要性采样方法来求得该函数的最优解,并利用幅度和时延的关系式,求得对应的多径幅度值,从而获取多径参数。相比其它信道估计算法,该算法具有更广的适用环境,且估计精准度较高,具有良好的实际应用价值。

参考文献(References):

- [1] 顾晨阳,李丁山,李含辉.单载波频域均衡系统信道估计的粒子滤波方法[J].信号处理,2014,30(4):483-487.
GU Chengyang, LI Dingshan, LI Hanhui. Channel Estimation of Single Carrier Frequency Domain Equalization System Using Particle Filter Method[J]. Journal of Signal Processing, 2014, 30(4): 483-487. (in Chinese)
- [2] 唐怀东,朱敏,武岩波.一种水声通信 Turbo 均衡中的软迭代信道估计算法[J].电子与信息学报,2013,35(3):677-682.
TANG Huaidong, ZHU Min, WU Yanbo. An Algorithm of Soft Iterative Channel Estimation for Turbo Equalization of Underwater Acoustic Communication [J]. Journal of Electronics & Information Technology 2013, 35(3): 677-682. (in Chinese)
- [3] 许鹏,汪晋宽,祁峰.改进的高效 MIMO-OFDM 系统 EM 信道估计算法[J].通信学报,2011,32(1):87-92.
XU Peng, WANG Jingkuan, QI Feng. Improved and Efficient EM Channel Estimation Algorithm for MIMO-OFDM Systems[J]. Journal on Communications, 2011, 32(1): 87-92. (in Chinese)
- [4] 刘婷,周杰.基于 SLO 算法的快速局部稀疏多径信道估计[J].计算机工程与设计,2014,35(3):785-790.
LIU Ting, ZHOU Jie. Fast Channel Estimation for Partial Sparse Multi-path Based on SLO Algorithm[J]. Computer engineering and design, 2014, 35(3): 785-790. (in Chinese)
- [5] 应军科,钟杰,赵民建,等.基于压缩感知的非整数点多径信道估计算法[J].哈尔滨工业大学学报,2013,45(11):69-73.
YING Junke, ZHONG Jie, ZHAO Minjian, et al. Channel Estimation Based on Compressive Sensing for Non-integral Delay Channel[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45(11): 69-73. (in Chinese)
- [6] 李明阳,卢虎.基于压缩感知的稀疏多径信道估计[J].系统工程与电子技术,2013,35(5):909-913.
LI Mingyang, LU Hu. CS-based Sparse Multipath Channel Estimation[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(5): 909-913. (in Chinese)
- [7] 伍飞云,周跃海,童峰.引入梯度导引似 p 范数约束的稀疏信道估计算法[J].通信学报,2014,35(7):172-177.
WU Feiyun, ZHOU Yuehai, Tong Feng. Estimation Algorithm for Sparse Channels with Gradient Guided p -Norm Like Constraints [J]. Journal on Communication, 2014, 35(7): 172-177. (in Chinese)
- [8] B M Bell, T E Ewart. Separating Multipaths by Global Optimization of Multidimensional Matched Filter [J]. IEEE Trans Acoust Speech and Signal Processing, 1986, ASSP-34(5): 1029-1037
- [9] 黎英云.微弱多径信号时延估计技术研究[D].武汉:华中科技大学,2009:63-79.
LI Yingyun. Research on time Delay of Weak Multipath Signal [D]. Wuhan: HuaZhong University of Science and Technology, 2009: 63-79. (in Chinese)
- [10] A Masmoudi, F Bellili, S Affes, et al. A Maximum Likelihood time Delay Estimator Using Importance Sampling [C] // Presented at the Proc IEEE GLOBECOM Houston, TX, 2011.
- [11] M Feder, E Weinstein. Parameter Estimation of Superimposed Signals Using the EM Algorithm [J]. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process, 1988, 36: 477-489.
- [12] 刘波.基于 EM 的突发通信参数估计技术研究[D].郑州:解放军信息工程大学,2007:33-52.
LIU Bo. Research on Burst Communication Parameter Estimation Based on EM [D]. Zhengzhou: PLA Information Engineering University, 2007: 33-52. (in Chinese)
- [13] 王惠刚,刘强.多普勒方位联合估计的蒙特卡罗算法[J].电子学报,2009,33(2):427-431.
WANG Huigang, LIU Qiang. A Monte Carlo Method for Joint Estimation of Dopplers and DOAs [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 33(2): 427-431. (in Chinese)
- [14] A Masmoudi, F Bellili, S Affes, et al. A Non-Data-Aided Maximum Likelihood Time Delay Estimator Using Importance Sampling [J]. IEEE Trans Signal Process, 2011, 59: 4505-4515.
- [15] M PINCUS M. A Closed form Solution for Certain Programming Problems [J]. Oper Research, 1968, (18): 1225-1228.
- [16] Masmoudi A, Bellili F, Affes S, et al. A Maximum Likelihood Time Delay Estimator Using Importance Sampling [C] // IEEE on Global Telecommunications Conference (GLOBECOM 2011), 2011: 1-6.
- [17] Masmoudi A, Bellili F, Affes S, et al. A Maximum Likelihood Time Delay Estimator in A Multipath Environment Using Importance Sampling [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(1): 182-193.
- [18] Wang H, Kay S, Saha S. An Importance Sampling Maximum Likelihood Direction of Arrival Estimator [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(10): 5082-5092.

(编辑:姚树峰)