

一种基于 Khatri-Rao 子空间的非均匀稀疏阵列

丁姗姗, 张永顺, 牛超, 赵小茹

(空军工程大学防空反导学院,西安,710051)

摘要 基于 Khatri-Rao(K-R)子空间提出一种提升阵列自由度的非均匀阵列排布方式,即新型嵌套阵列。新型嵌套阵列由大小 2 个均匀线阵(ULA)构成,较大 ULA 的阵元间隔取决于较小 ULA 的阵列长度。相较于自由度为 $O(N)$ 的 N 阵元 ULA, N 个阵元的新型嵌套阵可通过在 K-R 子空间中得到阵元数为 $(N^2/2 + N - 1)$ 的虚拟 ULA,将阵列自由度提升至 $O(N^2)$,大大提高了分辨多信源的能力。同时由于阵元稀疏排布, N 个阵元的新型嵌套阵的有效孔径大于 N 阵元 ULA,使新型嵌套阵列分辨临近目标的能力优于 ULA。在通过 K-R 子空间得到虚拟 ULA 的稀疏阵列流型中,新型嵌套阵列是自由度提升最大的方式之一,且在低信噪比和小快拍数情况下依然有较好性能。

关键词 DOA;Khatri-Rao 子空间;虚拟阵列;稀疏阵列

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2015.05.019

中图分类号 TN911.23 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2015)05-0078-05

A Novel Sparse Linear Array Geometry via Khatri-Rao Subspace

DING Shanshan,ZHANG Yongshun,NIU Chao,ZHAO Xiaoru

(Air and Missile Defense College,Air Force Engineering University,Xi'an 710051,China)

Abstract: A novel sparse linear array geometry, i.e. a new nested array, is proposed based on Khatri-Rao (K-R) subspace, which is capable of increasing the degrees of freedom (DOF) of arrays. The new nested array consists of two uniform linear arrays (ULA), where the spacing of larger ULA is determined by the array length of smaller one. Compared with a ULA providing DOF with sensors, a new nested array is able to increase the DOF to by obtaining a virtual ULA with sensors through K-R product in K-R subspace, and thus the increased DOF makes it possible to resolve more sources. In addition, the new nested array is a sparse array, and has longer aperture than that of ULA in equal number of sensors to bring a good ability to resolve nearby targets. The new nested array is one of the arrays, which have the largest DOF increased by K-R product, and the performance of the new nested array is good even under the condition of low SNR and small snapshots.

Key words: DOA;Khatri-Rao subspace; virtual array; sparse array

波达方向(DOA)估计作为阵列信号处理的一项基本技术,已被广泛应用于雷达、声纳以及无线传

感器组网技术中。其中,基于特征分解的子空间类算法:MUSIC 算法^[1]和 ESPRIT 算法^[2]有能力突

收稿日期:2015-04-09

作者简介:丁姗姗(1992—),女,河南开封人,硕士生,主要从事阵列信号处理研究.E-mail:dingshansahn001@hotmail.com

引用格式: 丁姗姗,张永顺,牛超,等.一种基于 Khatri-Rao 子空间的非均匀稀疏阵列[J].空军工程大学学报:自然科学版,2015,16(5):78-82. DING Shanshan,ZHANG Yongshun,NIU Chao,et al.A Novel Sparse Linear Array Geometry via Khatri-Rao Subspace[J]. Journal of Air Force Engineering University:Natural Science Edition,2015,16(5):78-82.

破阵列信号估计的“瑞利限”,自提出就受到了人们的关注。但是,对于一个包含 N 个阵元的均匀线阵 (ULA) 来说,无论是上述 2 种基本算法还是其改进算法,能够分辨的信源数目最多为 $N - 1$ 个。在之前的研究中,人们找到多种方法提升可分辨的信源数目。1985 年, Pillai 等人采用最小冗余阵 (MRA) 并通过构造增广协方差阵提高阵列的自由度^[3-4]; 1997 年, Abramovich 等人采用正定 Toeplitz 矩阵并提出了详细算法流程^[5]。后来,人们通过构造虚拟阵列提高阵列自由度,产生多于实际阵元的虚拟阵元,以求实现阵列扩展,最终达到增强阵列分辨多信源能力的目的。

目前,产生虚拟阵元的方法可基于接收数据的四阶累积量^[6-7]实现,该算法具有自动抑制加性高斯白噪声及任意高斯色噪声的能力,但运算量大,且正确估计需要较多的快拍数;也可基于接收数据协方差的 K-R 子空间^[8-9]实现,该算法与 MIMO 雷达提高阵列自由度的原理相似,不同之处在于: MIMO 雷达产生虚拟阵列同时需要发射和接收阵列,而采用 K-R 积只需接收阵列即可。

基于 K-R 子空间算法的 DOA 估计技术, Pal P 提出了名为 nested 的阵列流型^[10],得到了非常高的阵列自由度。在此基础上,文献^[11]将 K-R 子空间和 nested 阵列扩展到高阶,文献^[12]将 nested 阵列应用到分布式阵列中进行 DOA 估计。

1 信号模型

假设 D 个不相关的远场窄带信号入射到由 N 个阵元组成的直线阵列上,则阵元输出可表示为:

$$X(t) = AS(t) + N(t) \quad t = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 为一个快拍下的阵列输出, T 表示转置, M 为快拍数; 方向矩阵 $\mathbf{A} = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_D)] \in \mathbb{C}^{N \times D}$, \mathbf{A} 中的任一列向量是方向向量 $\mathbf{a}(\theta_i) = [e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \sin\theta_i}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_2 \sin\theta_i}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_N \sin\theta_i}]^T$, x_1, x_2, \dots, x_N 分别表示第 1, 2, \dots, N 个阵元相对于阵元参考点的位置, $\theta_i \in [-90^\circ, 90^\circ]$ 是第 i 个信源的波达方向角, λ 为波长; $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T \in \mathbb{C}^{D \times 1}$ 为零均值的信号矢量; $\mathbf{N}(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 表示空域白噪声, 其自相关矩阵为 $\mathbf{R}_{NN} = E\{\mathbf{N}(t)\mathbf{N}(t)^H\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 。

由以上定义,可得理想的数据协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_{XX} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{NN} = \mathbf{A} \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_D^2) \mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_n \quad (2)$$

式中: $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_D^2$, 表示入射信号的功率。考虑到实际接收数据矩阵是有限长的,所以实际中采用数据协方差矩阵的最大似然估计:

$$\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H \quad (3)$$

2 Khatri-Rao 积

矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times F}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{J \times F}$, 它们的 K-R 积为 $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{IJ \times F}$, 定义为:

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = [a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, \dots, a_f \otimes b_f] \quad (4)$$

式中: $\mathbf{a}_f, \mathbf{b}_f$ 分别为 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的第 f 列, \otimes 表示 Kronecker 积, 即 K-R 积是列向量的 Kronecker 积。

由文献^[10], 可知 K-R 积的性质:

$$\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{B}^H) = (\mathbf{B}^* \circ \mathbf{A}) \mathbf{d} \quad (5)$$

式中: $*$ 表示共轭; $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{d})$; $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵向量化。

对接收数据的协方差矩阵做向量化, 可得:

$$\mathbf{z} = \text{vec}(\mathbf{R}_{XX}) = \text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H) + \text{vec}(\mathbf{R}_{NN}) = (\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}) \mathbf{p} + \sigma_n^2 \text{vec}(\mathbf{I}_N) \quad (6)$$

式中: $\mathbf{p} = \text{diag}(\mathbf{R}_{SS}) = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_D^2]^T$ 。

现在, 将 $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{N^2 \times 1}$ 等效为虚拟阵列在一次快拍时采样的一个信号, 由前述信号模型, 可得:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}_{K-R} \mathbf{p} + \sigma_n^2 \mathbf{I}'_N \quad (7)$$

式中: $\mathbf{I}'_N = [\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_N^T]^T$, 列向量 \mathbf{e}_i 中除了第 i 个元素为 1, 其余 $(N - 1)$ 个元素均为 0。 $\mathbf{A}_{K-R} \in \mathbb{C}^{N^2 \times D}$ 为该信号的方向矩阵, 且:

$$\mathbf{A}_{K-R} = \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = [a^*(\theta_1) \otimes a(\theta_1), a^*(\theta_2) \otimes a(\theta_2), \dots, a^*(\theta_D) \otimes a(\theta_D)] \quad (9)$$

对 $\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}$ 按行分块时, N^2 个行向量中有重复项, 将重复项进行算术平均, 并将各个行向量按虚拟阵列的阵元位置重排, 重排后得到的方向矩阵表示为 $\mathbf{A}_{\text{order}}$ 。

3 新型嵌套阵列排布方式

由上述讨论可知, 通过 K-R 积, 可以得到阵元数更多的虚拟阵列, 且虚拟阵列的阵元个数取决于阵元位置间隔 $\{x_i - x_j\}, 1 \leq i, j \leq N$ 的自由度。由于阵元数大于 4 时, 阵元位置间隔中必定会产生冗余^[13], 人们致力于找到最优的阵列流型以得到更小的冗余度和更大的自由度, 由此产生了最小冗余阵的概念。二阶 nested 阵列^[10]就是一种特殊的最小冗余阵, 扩大阵列孔径的同时, 提高了分辨率。根据 K-R 积, 包含 N 个阵元的二阶 nested 阵列产生

的虚拟 ULA 具有 $\bar{N} = (N^2 - 2)/2 + N$ 个阵元^[9-11]。有能力产生自由度也为 \bar{N} 的虚拟 ULA。经仿真试验验证, \bar{N} 是实际阵元数为 N 的线阵通过 K-R 积可以产生的最大自由度。

本文提出的阵列流型由大小 2 个相邻的 ULA 构成, 共包含 $N = N_1 + N_2$ 个阵元, N 为偶数时 $N_1 = N/2 - 1, N_2 = N/2 + 1$ 。本文中重点讨论 N 为偶数时的情况, N 为奇数的情况可类比得到, 文中不

再赘述。较小 ULA 为一阶子阵, 包含 N_1 个阵元, 阵元间隔为 d_1 ; 较大 ULA 为二阶子阵, 包含 N_2 个阵元, 阵元间隔为 d_2 , 且 $d_2 = (N_1 + 1)d_1$ 。若用集合 S 表示阵元的位置, 那么第 1 个阵列的阵元位置 $S_1 = \{md_1, m = 1, 2, \dots, N_1\}$, 第 2 个阵列的阵元位置 $S_2 = \{n(N_1 + 1)d_1, n = 1, 2, \dots, N_2\}$ 。表 1 对二阶 nested 阵列和新型嵌套阵列的阵列排布方式进行了对比, 图 1 具体给出阵元数 $N = 6$ 时的阵列排布方式。

表 1 二阶 nested 阵列和新型嵌套阵列对比表

Tab.1 Comparison of two-level nested array and the new nested array

阵元数 N	二阶 nested 阵列			新型嵌套阵列		
	最优 N_1	N_2	DOF	最优 N_1	N_2	DOF
N 为偶数	$N_1 = N_2 = \frac{N}{2}$		$\frac{N^2 - 2}{2} + N$	$N_1 = \frac{N}{2} - 1, N_2 = \frac{N}{2} + 1$		$\frac{N^2 - 2}{2} + N$
N 为奇数	$N_1 = \frac{N - 1}{2}, N_2 = \frac{N + 1}{2}$		$\frac{N^2 - 2}{2} + N$	$N_1 = \frac{N - 1}{2}, N_2 = \frac{N + 1}{2} + 1$		$\frac{N^2 - 2}{2} + N$

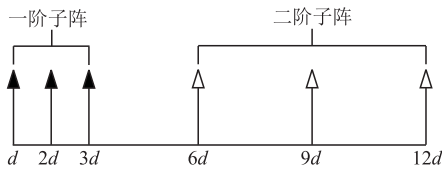


图 1 阵元数为 6 的新型嵌套阵列

Fig.1 The new nested array with 6 sensors

根据 K-R 积, 该阵列产生的虚拟阵列见图 2。图 2 中的实心圆表示新型嵌套阵列的阵元位置, 空心圆表示 K-R 子空间中的虚拟 ULA 的阵元位置, 空心圆下方的数据表示虚拟阵元与参考阵元之间的距离, 数据下方的实心矩形表示 $\mathbf{A}_{K-R} = \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}$ 中第 1 列 $\mathbf{a}^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}(\theta_1)$ 的物理意义及实现过程, 空心圆所对应的实心矩形的数目为虚拟阵列中单个阵元的冗余度, 可由表示阵元位置的向量通过卷积得到。

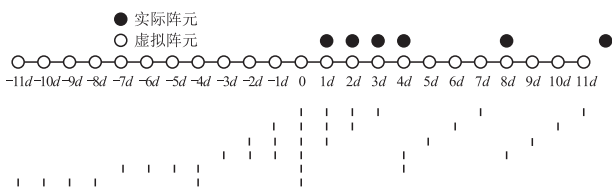


图 2 虚拟 ULA 形成示意图

Fig.2 Formation of virtual ULA

考虑二阶 nested 阵列, 对前述等效信号 \mathbf{z} 中与 \mathbf{A}_{K-R} 相对应的元素做处理, 即对与冗余度大于 1 的阵元相对应的元素取算术平均。将 \mathbf{z} 按阵元位置重排后得到:

$$\mathbf{z}_{\text{order}} = \mathbf{A}_{\text{order}} \mathbf{p} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N^r \quad (10)$$

式中: $\mathbf{I}_N^r \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times 1}$ 第 $(\bar{N} + 1)/2$ 个元素为 1, 其他元素均为 0。

从图 2 中可明显看出虚拟阵元大大提升了实际阵元的自由度。自由度的提升使具有 N 个阵元的新嵌套阵列在 K-R 子空间中具有能力能估计 D 个信源, $0 < D < \bar{N}$, 而具有 N 个阵元的 ULA 仅能估计最多 $N - 1$ 个信源。并且, N 个阵元的新嵌套阵列的有效孔径大于 N 个阵元的 ULA, 在信源数相同的情况下, 具有更好的估计性能。

4 基于 K-R 子空间的一种 DOA 估计方法

类似空间平滑算法^[14], 把 \bar{N} 个虚拟阵元划分为 $N^2/4 + N/2$ 个子阵, 每个子阵包含 $N^2/4 + N/2$ 个虚拟阵元, 则第 i 个子阵的接收信号可表示为:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{p} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_n^r = \mathbf{A}_{11} \mathbf{D}^{i-1} \mathbf{p} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_n^r \quad (11)$$

$$\text{式中: } \mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\frac{N^2}{4} + \frac{N}{2} - 1} & v_{\frac{N^2}{4} + \frac{N}{2} - 1} & \dots & v_{\frac{N^2}{4} + \frac{N}{2} - 1} \end{pmatrix}; \mathbf{D}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_D \end{pmatrix}; v_k = e^{j\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_k}; \mathbf{I}_n^r \text{ 是第 } i \text{ 个}$$

元素为 1, 其余元素均为 0 的列向量。

对 $N^2/4 + N/2$ 个子阵的数据协方差矩阵求和, 可证明^[11]:

$$R_{\text{sum}} = \frac{1}{N^2/4+N/2} \sum_{i=1}^{N^2/4+N/2} R_i = \frac{1}{N^2/4+N/2} \sum_{i=1}^{N^2/4+N/2} (\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^H) = \frac{1}{N^2/4+N/2} (\mathbf{A}_{11} \mathbf{p} \mathbf{p}^H \mathbf{A}_{11}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I})^2 = \hat{R}^2 \quad (12)$$

显然,经过处理后得到的协方差矩阵之和可进行特征值分解,且与 $\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{N^2/4+N/2}} (\mathbf{A}_{11} \mathbf{p} \mathbf{p}^H \mathbf{A}_{11}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I})$ 的 D 个大特征值对应的特征向量张成相同的子空间,其特征值为后者的平方。对 R_{sum} 做特征分解后运用 MUSIC 算法或 ESPRIT 算法进行 DOA 估计即可。

5 仿真实验

为了验证本文方法的有效性,采用常规 DOA 估计算法对所提出的新型嵌套阵列流型的估计性能作了仿真实验研究。仿真实验比较了在采用 MUSIC 算法和 ESPRIT 算法时,ULA、二阶 nested 阵列和新型嵌套阵列在不同信源数,不同信噪比和不同快拍数条件下的估计性能。

仿真 1:对 ULA 和新型嵌套阵列流型采用 MUSIC 算法进行 DOA 估计作对比。考虑阵元数目 $N=8$ 的线阵,分别按照 ULA 和新型嵌套阵列流型排列,给定阵元基本间隔单位 $d = \lambda/2$,每个点做 1 000 次蒙特卡洛实验。

图 3 给定信噪比 $\text{SNR}=-10$ dB,快拍数 $n=200$,设定 3 个人射信号源,信号波达方向分别为 $10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 。图 3 中,可明显看出在低信噪比条件下 ULA 已失去估计能力,而新型嵌套阵列流型仍可估计波达方向角度。

图 4 给定信噪比 $\text{SNR}=10$ dB,快拍数 $n=200$,

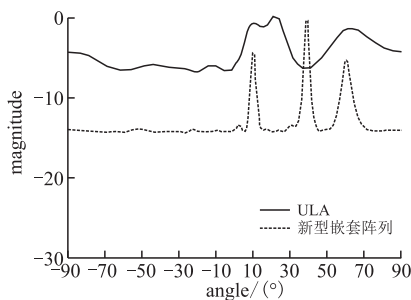


图 3 MUSIC 谱($\text{SNR}=-10, n=200$)

Fig.3 MUSIC spectrum($\text{SNR}=-10, n=200$)

设定 3 个人射信号源,信号波达方向分别为 $10^\circ, 15^\circ, 60^\circ$ 。图 4 中,可明显看出在入射信号较为接近时,ULA 无法准确估计,而新型嵌套阵列流型仍可进行有效估计。

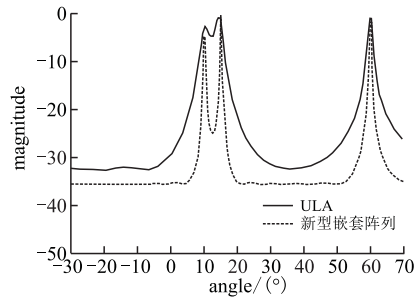


图 4 MUSIC 谱($\text{SNR}=10, n=200$)

Fig.4 MUSIC spectrum($\text{SNR}=10, n=200$)

仿真 2:对 ULA 和新型嵌套阵列流型采用 ESPRIT 算法进行 DOA 估计作对比。考虑阵元数目 $N=8$ 的线阵,分别按照 ULA 和本文提出的阵列流型排列,给定阵元基本间隔单位 $d = \lambda/2$,每个点做 1 000 次蒙特卡洛实验,设定 3 个人射信号源,信号波达方向分别为 $10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 。

图 5 分别给定快拍数 $n=200$ 和 $n=50$,在其他基本条件不变的仿真条件下比较 ULA 和新型嵌套阵列。由以上结果可明显看出,采用新型嵌套阵列效果远好于均匀线阵,尤其是在低信噪比和小快拍数的条件下。

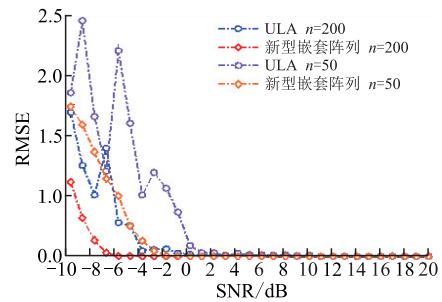
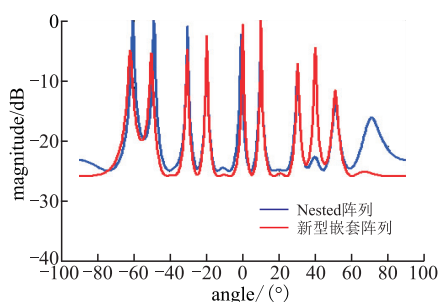
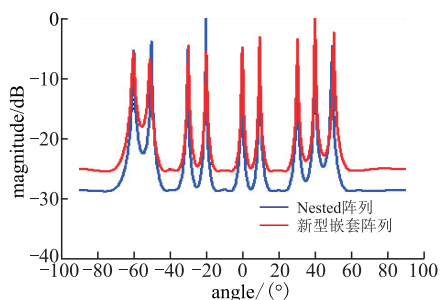
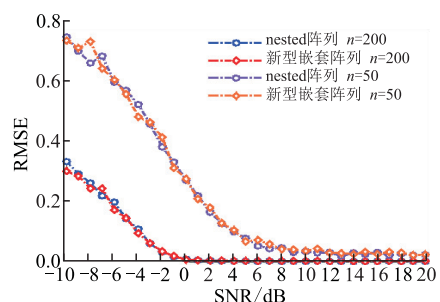


图 5 RMSE 随 SNR 变化图($N=8$)

Fig.5 RMSE versus SNR($N=8$)

仿真 3:对二阶 nested 阵列和新型嵌套阵列流型作对比。考虑阵元数目 $N=8$ 的线阵,分别按照二阶 nested 阵列和新型嵌套阵列流型排列。给定阵元基本间隔单位 $d = \lambda/2$,信噪比 $\text{SNR}=5$ dB,快拍数 $n=200$,每个点做 1000 次蒙特卡洛实验。设定 9 个人射信号源,信号波达方向分别为 $-60^\circ, -50^\circ, -30^\circ, -20^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ 。

图 6 和图 7 采用 MUSIC 算法,图 8 采用 ESPRIT 算法,应用二阶 nested 阵列和新型嵌套阵列进行 DOA 估计。由以上结果可明显看出,采用新型嵌套阵列与采用二阶 nested 阵列仿真结果相似,在低信噪比和小快拍数的条件下均保持一定的估计能力。

图6 MUSIC谱(SNR=0, $n=200$)Fig.6 MUSIC spectrum(SNR=0, $n=200$)图7 MUSIC谱(SNR=10, $n=200$)Fig.7 MUSIC spectrum(SNR=10, $n=200$)图8 RMSE随SNR变化图($N=8$)Fig.8 RMSE versus SNR($N=8$)

6 结语

本文提出了一种基于K-R子空间非均匀稀疏阵列的排布方式,通过采用K-R积变换,得到内插均匀的虚拟ULA,利用虚拟阵列进行DOA估计,能在保持有效孔径和分辨能力的基础上减少实际阵元数目,并可分辨多于实际阵元数目的信源,从而大大提高了估计性能。仿真结果表明,新型嵌套阵列在低信噪比和小快拍数情况下DOA估计性能比较好。

参考文献(References):

- [1] Schmidt R O. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Spectral Estimation[J]. IEEE Trans on AP, 1986, 34(3): 276-280.
- [2] Roy R, Kailath T. ESPRIT-Estimation of Signal Parameters via Rotational in Variance Techniques[J]. IEEE Trans on ASSP, 1986, 37(7): 984-995.
- [3] Pillai S U, Bar-Ness Y, Haber F. A New Approach to Array Geometry

for Improved Spatial Spectrum Estimation[J]. Proceedings of the IEEE, 1985, 73(10): 1522-1524.

- [4] Pillai S, Haber F. Statistical Analysis of a High Resolution Spatial Spectrum Estimator Utilizing an Augmented Covariance Matrix[J]. IEEE Trans Acoust Speech Signal Process, 1987, 35(11): 1517 - 1523.
- [5] Abramovich Y I, Gray D A, Gorokhov A Y, et al. Positive-definite Toeplitz Completion in DOA Estimation for Non-Uniform Linear Antenna Arrays[C]//Proc.SSAP-96,1996;550-553.
- [6] Chevalier P, Albera L, Ferreol L, et al. Comon. On the Virtual Array Concept for Higher Order Array Processing[J]. IEEE Trans Signal Process, 2005, 53(4): 1254-1271.
- [7] 张小飞, 汪飞, 徐大专. 阵列信号处理的理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.
ZHANG Xiaofei, WANG Fei, XU Dazhuan. Theory and Application of Array Signal Processing[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010. (in Chinese)
- [8] Ma W K, Hsieh T H, Chi C Y. DOA Estimation of Quasi-Stationary Signals Via Khatri-Rao Subspace[C]//ICASSP, 2009: 2165-2168.
- [9] Ma W, Hsieh T, Chi C. DOA Estimation of Quasi-Stationary Signals with Less Sensors than Sources and Unknown Spatial Noise Covariance: A Khatri-Rao Subspace Approach[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(4): 2168-2180.
- [10] Pal P, Vaidyanathan P. Nested Arrays: A Novel Approach to Array Processing With Enhanced Degrees of Freedom [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(4): 4167-4181.
- [11] Li Shuang, He Wei, Yang Xu-guang, Bao Ming, Wang Ying-guan. Direction of Arrival Estimation of Quasi-Stationary Signals Using two-Level Khatri-Rao Subspace and Four-Level Nested Array[J]. Springer, J Cent South Univ, 2014, 21: 2743-2750.
- [12] 王毅, 陈伯孝, 杨明磊, 等. 分布式 nested 阵列及其高精度 DOA 估计[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(2): 253-258.
WANG Yi, CHEN Boxiao, YANG Minglei, et al. High Accuracy DOA Estimation Using Separated Nested Array[J]. System Engineering and Electronics, 2015, 37(2): 253-258. (in Chinese)
- [13] 张璐. 最小冗余阵波束合成技术及应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.
ZHANG Lu. Beam Forming Technology and Its Applications in Minimum Redundancy Arrays[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2009. (in Chinese)
- [14] Evans J E, Johnson J R, Sun D f. High Resolution Angular Spectrum Estimation Techniques for Terrain Scattering Analysis and Angle of Arrival Estimation[C]//Processing 1st ASSP Workshop Spectral Estimation. Hamilton, Ontario, 1981: 134-139.
- [15] 沈堤, 童宁宁, 郭艺夺, 等. 基于盲信号分离的波达方向估计[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2010, 11(2): 47-51.
SHEN Di, TONG Ningning, GUO Yiduo, et al. DOA Estimation Method Based on Blind Signal Separation[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2010, 11(2): 47-51. (in Chinese)

(编辑: 徐楠楠)