

Lorenz 系统单一耦合同步研究

周双, 谢绍斌

(空军工程大学信息与导航学院, 西安, 710077)

摘要 针对耦合同步法中如何确定耦合强度的问题,提出了 Lorenz 系统单一耦合同步定理。在单向耦合同步基础上进行改进,减少状态变量耦合数目,提出了单一耦合同步方法;利用 Lyapunov 稳定性理论及 Routh-Hurwitz 判据,通过判定误差系统系数矩阵的特征值符号,推导了同步误差渐进稳定时耦合系数需满足的充分条件;仿真验证了该定理的正确性和有效性,表明了该定理下的单一耦合同步具有良好的抗干扰能力。

关键词 混沌同步; Lorenz 系统; 单一耦合; 充分条件

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2015.05.013

中图分类号 O231.2 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2015)05-0052-04

A Single coupling method in Lorenz systems

ZHOU Shuang, XIE Shaobin

(Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: In order to solve the problem of how to determine the coupling strength in coupling synchronization method, a theorem of single coupling method between Lorenz systems is proposed. First, by reducing the number of state variables, an improved synchronization method named, i.e. single coupling method, is proposed on the basis of the unidirectional coupling synchronization. Then, in accordance with stability theory and Routh-Hurwitz criterion, by detecting the signs of characteristic values reduced from the Jacobi matrix of error system, full conditions are derived for satisfying the coupling coefficient in error gradually stabilizing error at zero. Consequently, a sufficient condition of single coupling synchronization is supposed. Last, the simulation results verify the correctness and effectiveness of the sufficient conditions, and the anti-interference performance is good.

Key words: chaotic synchronization; Lorenz systems; single coupling method; sufficient condition

混沌信号的隐蔽性、不可预测性和高度复杂性等特点使其特别适用于保密通信,混沌保密通信作为新兴通信技术已显示强大生命力^[1-2]。混沌保密通信要求发送端和接收端的混沌系统同步,因此混沌同步是混沌保密通信的关键技术和重要内容。近年混沌同步问题引起了学者们的广泛关注,并逐渐

成为研究热点和难点^[3-4]。耦合同步的研究起源于非线性振荡器理论^[5-6],它适用于无法实现子系统分解的混沌系统,其中耦合强度的确定是否合理是决定耦合同步的关键因素。在实际应用中,线性状态向量的传递相对方便一些,因此线性耦合同步应用比较普遍,1999年 Kapitaniak 对线性耦合情况进行

收稿日期:2015-03-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61202490);航空科学基金资助项目(20BZC15008)

作者简介:周双(1990-),女,黑龙江绥化人,硕士生,主要从事混沌同步及其在保密通信中的应用研究.E-mail:hljzsh@163.com

引用格式:周双,谢绍斌. Lorenz 系统单一耦合同步研究[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2015,16(5):52-55. ZHOU Shuang, XIE Shaobin. A Single coupling method in Lorenz systems[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2015, 16(5): 52-55.

了分析,在理论上证明了混沌系统之间只有足够强的耦合,才能实现同步^[7]。

线性耦合同步可以分为双向耦合和单向耦合。双向耦合系统不区分驱动和响应关系,2 个混沌系统互相影响;然而在大多数情况下,并不希望驱动系统受到影响,只有响应系统中才存在耦合项,即单向耦合。文献[8]基于对称矩阵研究了混沌系统双向耦合同步的充分条件;文献[9]构造了指数型 Lyapunov 函数,解析地证明了 Chen 超混沌系统线性耦合实现同步的可靠性,进一步研究了非线性耦合对线性耦合同步的调制作用;文献[10]以非线性振子 Chua 电路为例,研究了线性耦合实现 2 个系统之间的完全同步;文献[11]利用线性反馈法基于 Lyapunov 稳定性理论,研究了一类混沌系统的同步的充分条件。上述研究中驱动系统均需要发送多个变量控制响应系统与其同步,考虑到实际通信工程中仅发射单个变量,因此本文改进了单向耦合同步,只对一个系统状态变量进行耦合,提出了单一耦合同步方法,更具有研究意义。

1 单一耦合同步

本文以典型 Lorenz 系统为例进行研究分析,根据文献[12]中 Lorenz 系统的动力学方程有: $-20 \leq x \leq 20, -30 \leq y \leq 30, 0 \leq z \leq 50$ 。

1.1 单一耦合同步基本原理

根据混沌自同步机制选择 Lorenz 系统分别作为驱动系统(式(1))和响应系统(式(2)):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = cx_1 - x_1z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) - k_1(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_2 = cx_2 - x_2z_2 - y_2 - k_2(y_2 - y_1) \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - bz_2 - k_3(z_2 - z_1) \end{cases} \quad (2)$$

式中: k_1, k_2, k_3 为耦合系数。

在双向耦合或单向耦合问题中,关键在于耦合强度的确定,只有适当的耦合强度混沌系统才能实现同步并具有良好的抗干扰性。通常采用的方法有:Lyapunov 函数法、Lyapunov 指数法、线性时变系统稳定性判据等。然而, Lyapunov 函数的选择和确定一般靠经验,没有普遍适用的方法;计算误差系统的 Lyapunov 指数时,针对不同的系统会存在合理选择计算方法的问题,且计算量较大,甚至无法计

算(因为混沌系统通常是非线性、高复杂度的),经典的线性系统理论有时不适用于混沌系统。可见,耦合强度的确定是耦合同步法中的关键问题和重要内容。

由于在混沌通信工程中,通常发射单一变量,因此在单向耦合同步的基础上进行改进,选取响应系统(式(3)),提出单一耦合同步法,更具有研究意义。

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) - k(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_2 = cx_2 - x_2z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - bz_2 \end{cases} \quad (3)$$

式中: k 为耦合系数,在此并不限定 $k > 0$ 。

1.2 Lorenz 系统单一耦合同步定理

依据式(1)、(3),定义同步误差:

$$\begin{cases} e_1 = x_2 - x_1 \\ e_2 = y_2 - y_1 \\ e_3 = z_2 - z_1 \end{cases} \quad (4)$$

则有 $\dot{e}_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1, \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_1, \dot{e}_3 = \dot{z}_2 - \dot{z}_1$, 故可得误差系统式(5):

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(k+a)e_1 + ae_2 \\ \dot{e}_2 = (c-z_1)e_1 - e_2 - x_2e_3 \\ \dot{e}_3 = y_1e_1 + x_2e_2 - be_3 \end{cases} \quad (5)$$

式(5)的系数矩阵如式(6):

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -(k+a) & a & 0 \\ c-z_1 & -1 & -x_2 \\ y_1 & x_2 & -b \end{pmatrix} \quad (6)$$

则有如下对称矩阵式(7):

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T}{2} = \begin{pmatrix} -(k+a) & \frac{a+c-z_1}{2} & \frac{y_1}{2} \\ \frac{a+c-z_1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{y_1}{2} & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (7)$$

由数学知识可知对称矩阵 $\mathbf{B}(t)$ 的特征值等于系数矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 的特征值实部,这里设 λ_a 和 λ_b 分别为 $\mathbf{B}(t)$ 的最小和最大特征值。由文献[13]可得如下引理。

引理 设微分方程 $\dot{x} = \mathbf{A}x$ 有解 $x(t)$, 则 $x(t)$ 满足:

$$\|x(t)\| \exp\left\{\int_0^t \lambda_a(s) ds\right\} \leq \|x(t)\| \leq \|x(0)\| \exp\left\{\int_0^t \lambda_b(s) ds\right\} \quad (8)$$

若 $\forall \epsilon > 0, \exists \lambda_b < -\epsilon$, 则对于任意给定的初值 $x(0)$, $x(t)$ 按指数速率收敛到零。

若式(7)解满足式(8), 则同步误差 $e(t)$ 以指数速率收敛到零, 即单一耦合的 2 个混沌系统达到渐近同步。本文针对典型 Lorenz 系统, 可进一步推导出如下定理。

定理 如果耦合系数 k 满足如下条件:

$$r_0 = (a+k)b - \frac{b^2(a+c)^2}{16(b-1)}M > 0 \quad (9)$$

$$s_0 = (a+k)(1+a+k) + b(1+a+k)(1+a+k+b) - \frac{b^2(a+c)^2}{16(b-1)}(a+k+M) > 0 \quad (10)$$

$$p = (a+k) + 1 + b > 0 \quad (11)$$

式中: $M = \max\{1, b\}$ 。则对于任意初始值, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 单一耦合的 Lorenz 系统达到渐近同步。

证明: 对称矩阵式(7) $B(t)$ 的特征多项式为:

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0 \quad (12)$$

式中: $p = (a+k) + 1 + b$,

$$q = (a+k) + (a+k+1)b - \left(\frac{c+a-z_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{2}\right)^2,$$

$$r = (a+k)b - \left(\frac{c+a-z_1}{2}\right)^2 b - \left(\frac{y_1}{2}\right)^2,$$

令 $s = pq - r$, 则:

$$r = (a+k)b - \left(\frac{c+a-z_1}{2}\right)^2 b - \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 \geq$$

$$(a+k)b - \frac{M b^2 (a+c)^2}{4(b-1)} = r_0,$$

$$s = (a+k)(1+a+k) + b(1+a+k)(1+a+k+b) -$$

$$(a+b+k)\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 - (1+a+k)\left(\frac{c+a-z_1}{2}\right)^2 \geq$$

$$(a+k)(1+a+k) + b(1+a+k)(1+a+k+b) -$$

$$\frac{1}{4}(a+k+M)\frac{b^2(a+c)^2}{4(b-1)} = s_0$$

式中: $M = \max\{1, b\}$ 。如果 $r_0 > 0, s_0 > 0$, 则 $r > 0, s > 0$ 。如果 $p = (a+k) + 1 + b > 0$, 则 $q = s + r/p > 0$ 。

根据 Routh-Hurwitz 判据, 若满足 $p > 0, q > 0, r > 0, s > 0$, 则特征多项式(12)的所有特征值均为负值。此时, 误差系统(5)的解满足引理, 同步误差 $e(t)$ 以指数速率收敛到零, 即单一耦合的 Lorenz 系统达到渐近同步。证毕。

2 数值仿真分析

2.1 同步时间

在数值仿真中, 选取时间步长为 $\tau = 0.001$ s, 采用四阶 Runge-Kutta 法去求解方程(1)和(3)。驱动

系统(1)和响应系统(3)的初始点分别选取为 $x_1(0) = -15, y_1(0) = -10, z_1(0) = 50$ 和 $x_2(0) = 20, y_2(0) = 5, z_2(0) = 25$, 因此, 误差初始值为 $e_1(0) = 35, e_2(0) = 15, e_3(0) = -25$ 。根据 Lorenz 系统模型参数及状态变量的取值范围, 选取 $k = 1500$ 即可满足上述定理。

图 1 是驱动系统(1)和响应系统(3)实现单一耦合同步的误差曲线。图 1(a)是系统状态变量 x , 当时间 t 接近 1 s 时, 误差 $e_1(t)$ 已基本稳定在零点附近, 同理, 图 1(b)、(c)分别是系统状态变量 y, z , 当时间 t 接近 3 s 时, 误差 $e_2(t), e_3(t)$ 也已稳定在零点附近, 可见 3 条同步误差 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 随时间变化的特性曲线最终均可趋于零, 驱动系统(1)和响应系统(3)实现了渐近同步。即当耦合系数满足上述充分条件时, Lorenz 混沌系统可实现同步, 且同步状态长时间稳定, 验证了上述定理的正确性。此外, 同步误差 $e_1(t), e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 在稳定后可达到数量级 10^{-4} , 根据传统通信理论经验值可知, 此时接收系统可较好地追踪发送系统的状态, 即当耦合系数满足上述充分条件时, Lorenz 混沌系统可达到较高精度同步, 有效准确地传输信息, 验证了上述定理的有效性。

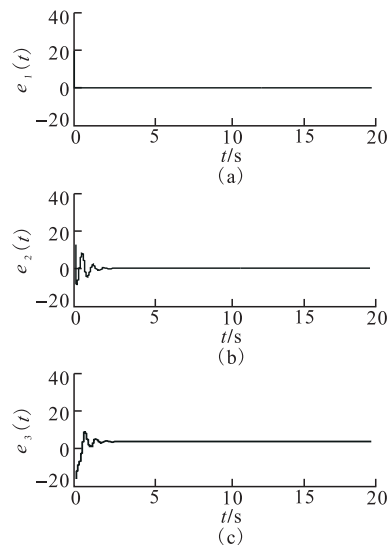


图 1 驱动系统(2)和响应系统(4)的同步误差曲线
Fig.1 Synchronization error of drive system (2) and response system (4)

2.2 抗干扰性能

在混沌保密通信工程中, 信号在信道传输过程中难免会受到信道畸变、外部噪声等干扰, 因此需要抗干扰性较好的同步方法。假设上述单一耦合同步法存在扰动, 通过在驱动变量中叠加高斯白噪声, 分析其抗干扰性能。

在数值仿真实验中, 当加入 $\text{SNR} = 20$ dB 的高

斯白噪声,驱动系统(1)和响应系统(3)的同步波形图见图2,可见,当时间接近1s,3s,3s时,此时存在扰动的2个Lorenz系统仍可达到近似同步,说明本文所提出定理下的单一耦合同步具有良好的抗干扰性,有可能应用于混沌保密通信工程中,具有一定的理论意义和研究价值。

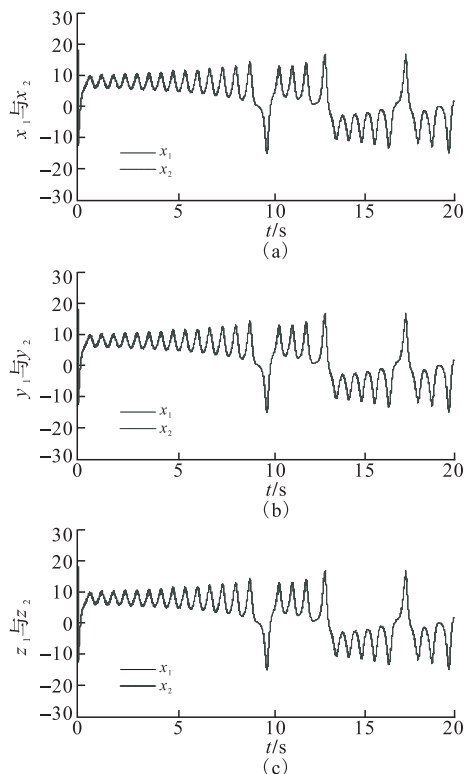


图2 当SNR=20 dB时,驱动系统(1)和响应系统(2)的同步波形图

Fig.2 When SNR=20 dB,synchronization wave of drive system (1) and response system (2)

3 结语

在混沌同步中,耦合同步法收敛速度快,但是存在如何适当确定耦合强度的问题。本文针对Lorenz系统,改进了单向耦合同步,提出单一耦合同步方法;然后利用Lyapunov稳定性理论及Routh-Hurwitz判据,经过严格的数学理论推导,提出了Lorenz系统单一耦合同步定理;最后通过数值仿真验证了该定理的正确性和有效性,并分析了单一耦合同步的抗干扰性,表明其具有良好抗干扰能力。后续工作将围绕如何将单一耦合同步法与混沌通信方案结合,有效实现信息传输进行研究。

参考文献(References):

- [1] LÜ J, Lu J, Chen S. Chaotic Time Series Analysis and Its Application [M]. China: Wuhan University Press, 2002.
- [2] Wang X, Chen G. Chaotification via Arbitrarily Small Feed-

back Controls: Theory, Method, and Applications [J]. Int J Bifur Chaos, 2000, 10: 549-570.

- [3] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in Chaotic Systems [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8):821-824.
- [4] Kocarev L, Parlitz U. General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication [J]. Physical Review Letters, 1995, 74(6):5028-5031.
- [5] Roy R. Experimental Synchronization of Chaos [J]. Physical Review Letters, 1994, 72(13):2009-2012.
- [6] Sugawara T. Observation of Synchronization in Laser Chaos [J]. Physical Review Letters, 1994, 72(22):3502-3505.
- [7] Kapitaniak T. Experimental Synchronization of Chaos Using Continuous Control [J]. Int J Bifur Chaos, 1999, 4(2): 493-498.
- [8] Li D M, Lu J A, Wu X Q. Linearly Coupled Synchronization of the Unified Chaotic Systems and the Lorenz Systems [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2005, 23:79-85.
- [9] 力帆,靳伍银,马军.非线性耦合对线性耦合同步的调制研究[J].物理学报,2012,61(24):240501.
LI Fan, JIN Wuyin, MA Jun. Modulation of Nonlinear Coupling on the Synchronization Induced by Linear Coupling [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(24): 240501. (in Chinese)
- [10] 何玉俊,褚润通,李凡.周期振子Chua电路的线性耦合同步[J].量子电子学报,2013,30(5):601-607.
He Yujun, CHU Runtong, LI Fan. Linear Coupling-induced Synchronization Between Periodic Chua Oscillators [J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2013, 30(5): 601-607. (in Chinese)
- [11] 徐瑞萍,高存臣.基于线性反馈控制的一类混沌系统的同步[J].中国海洋大学学报,2014,44(5):114-120.
XU Ruiping, CAO Cunchen. Synchronization of A Chaos System Based on Linear Feedback Control [J]. Periodical of Ocean University of China, 2014, 44(5): 114-120. (in Chinese)
- [12] 陈关荣,吕金虎. Lorenz系统族的动力学分析、控制与同步[M].北京:科学出版社,2003.
CHEN Guanrong, LÜ Jinhu. Dynamical Analysis Control and Synchronization of A Modified Lorenz System [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)
- [13] LÜ J H, Zhou T S, Zhou S C. Chaos Synchronization Between Two Different Chaotic Systems [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2002, 14(4): 529-541.

(编辑:姚树峰)