

# 循序 II 型删失数据下可靠性参数置信区间估计方法

钟季龙, 郭基联, 沈安慰

(空军工程大学航空航天工程学院, 西安, 710038)

**摘要** 修正威布尔分布模型能够准确表征复杂航空装备故障率“浴盆曲线”, 利用该模型构建置信区间估计方法。以循序-II型删失数据下修正威布尔分布的最大似然点估计方法为基础, 设计了基于自助法的置信区间估计方法。通过案例分析, 对一组失效数据进行拟合, 根据按百分比排列的自助算法, 获取了修正威布尔分布的参数估计值和置信区间, 与 Bayes 区间估计结果进行了对比, 得出以下结论: 同等置信度水平下, 用自助法进行区间估计避免了复杂的运算, 方法简单且结果准确, 为循序 II 型删失计划下的可靠性评估问题提供了可行的理论分析方法。

**关键词** 可靠性评估; 修正威布尔分布; 循序-II型删失; 浴盆曲线; 极大似然估计; 自助法

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2015.03.005

**中图分类号** TJ06 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2015)03-0021-04

## Confidence Interval Estimation Method of Reliability Parameter under the Progressive Type-II Censoring Data

ZHONG Jilong, GUO Jilian, SHEN Anwei

(Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract:** A modified Weibull distribution model is proposed for aviation equipment generally obeyed U-shape curve, which is more standard than exponential distribution and Weibull distribution. The Maximums Likelihood Estimation (MLE) for point estimation and confidence interval estimation method are deducted under progressively type-II censored data. Furthermore, according to the algorithm of the percentile bootstrap method an example based on matching a set of failure data is given to obtain the results of point estimation and confidence interval estimation under modified Weibull distribution. And through the comparison between bootstrap method and Bayes method, the results show that the bootstrap method is more accurate and can be simpler under the same confidence level, which provides an available theoretical analysis method for the problem of reliability estimation under progressively type-II censored plan.

**Key words:** progressively type-II censored plan; modified Weibull distribution; maximums likelihood estimation (MLE); U-shape curve

可靠性是航空装备的生命, 是武器装备质量的核心<sup>[1]</sup>。目前, 可靠性数据分析的主要工作集中在

收稿日期: 2014-09-15

基金项目: 陕西省软科学技术基金资助项目(2011KRM122, 2014KRM35)

作者简介: 钟季龙(1990-), 男, 四川成都人, 硕士生, 主要从事飞行器总体设计与综合论证研究, E-mail: z\_jilong@sina.cn

**引用格式:** 钟季龙, 郭基联, 沈安慰. 循序 II 型删失数据下可靠性参数置信区间估计方法[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2015, 16(2): 21-24. ZHONG Jilong, GUO Jilian, SHEN Anwei, et al. Confidence Interval Estimation Method of Reliability Parameter under the Progressive Type-II Censoring Data[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2015, 16(3): 21-24.

基于试验数据和现场故障数据的统计分析领域。对于飞机这样结构组成复杂、多故障源的设备,其故障率经常表现为“浴盆曲线”,即两边高,中间低的形式,其研究意义在于合理经济地使用航空装备以及装备定寿。文献[2]首次基于两参数威布尔分布提出了修正威布尔分布的模型,能在“浴盆曲线”的规律下对可靠性数据进行建模。国内外对修正威布尔分布进行了很多研究<sup>[3-6]</sup>,在可靠性工程领域还未见相关文献报道。

在装备寿命测试和可靠性评估中,经常出现数据的删失。在装备试验中,最常见的有 I 型删失和 II 型删失。随着基础理论的发展和实际应用中的需要,循序 II 型等类型的删失数据研究越来越多<sup>[7-8]</sup>。循序 II 型删失计划<sup>[9]</sup>下可靠性试验允许更加灵活地终止试验或者转移它处使用。

由于循序 II 型删失计划得到的删失数据的置信区间估计比较复杂,无法得到精确的区间估计,因此,本文在循序 II 型删失计划下,通过使用最大似然估计方法,对修正威布尔分布的可靠性评估进行了方法推导,在此基础上重点设计了一套置信区间估计方法,能够有效得出置信区间。

## 1 修正威布尔分布概述

### 1.1 基本原理

本文研究的修正威布尔分布是在一般威布尔分布基础上,通过引入 2 个形状参数  $\beta$  和  $\lambda$  的修正威布尔,其概率密度函数、累计失效函数,可靠度函数和故障率失效函数分别如下:

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda) = \alpha(\beta + \lambda x)x^{\beta-1} \exp(\lambda x - \alpha x^\beta e^{\lambda x}), \alpha > 0, \lambda > 0, \beta \geq 0 \quad (1)$$

$$F(x; \alpha, \beta, \lambda) = 1 - \exp(-\alpha x^\beta e^{\lambda x}) \quad (2)$$

$$S(t) = \exp(-\alpha t^\beta e^{\lambda t}) \quad (3)$$

$$H(t) = \alpha(\beta + \lambda t)t^{\beta-1} \exp(-\lambda t) \quad (4)$$

式中:  $\alpha$  为尺度参数,  $\beta$  和  $\lambda$  同时为修正威布尔分布的形状参数。从式(1)可以得出,当  $\lambda = 0$  时,修正威布尔分布即变成常见的两参数威布尔分布,见图 1 (a);当  $\beta = 0$ ,该分布又变为 I 型极值分布、对数伽马分布或者称为对数威布尔分布,见图 1 (b)。当  $\lambda = 0$  和  $\beta = 2$  时,修正威布尔分布又变成单参数瑞利分布。同时,从式(4)中可以看出其失效函数的形状依赖于  $\beta$ ,当  $\beta \geq 1$  时该函数单调增长,当  $0 < \beta < 1$  时,函数类似于浴盆形状。因此,用修正威布尔分布能进一步更加准确、合理表征故障率曲线。

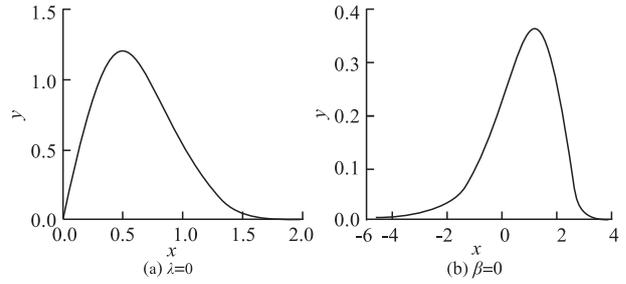


图 1 修正威布尔分布

Fig.1 Modified Weibull distribution

### 1.2 最大似然方法的点估计

最大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, MLE)是统计模型中最常用的参数估计方法之一<sup>[10]</sup>。文献[11]已针对循序 II 型删失数据的最大似然法的点估计提出了可行算法。如果原始测试中的失效次数  $n$  来自一个累计分布函数是  $F(x)$  和概率分布函数  $f(x)$  的连续总体。极大似然估计中的参数  $\alpha, \beta, \lambda$  可通过解下面的方程组得到:

$$\bar{\alpha}_{ML} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m (R_i + 1) x_i^\beta e^{\lambda x_i}} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{(\bar{\beta}_{ML} + \bar{\lambda}_{ML} x_i)} + \sum_{i=1}^m \log(x_i) - \bar{\alpha}_{ML} \sum_{i=1}^m (R_i + 1) x_i^{\bar{\beta}_{ML}} e^{\bar{\lambda}_{ML} x_i} \log(x_i) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{(\bar{\beta}_{ML} + \bar{\lambda}_{ML} x_i)} + m\bar{x} - \bar{\alpha}_{ML} \sum_{i=1}^m (R_i + 1) x_i^{\bar{\beta}_{ML} + 1} e^{\bar{\lambda}_{ML} x_i} = 0 \quad (7)$$

因为式(6)和式(7)中的  $\beta, \lambda$  不能获得解析解,必须采用牛顿迭代法等数值方法求解。

点估计方法的推导可以作为下一步区间估计方法的基础,进一步对置信区间进行估计。

## 2 基于自助法的置信区间估计

自助法即 Bootstrap 法,是 Efron 在 1977 年提出的统计方法。自助法采用现有的故障时间样本资料去模仿未知的分布,达到将子样信息“提携”的目的。但仅用于解决可靠性评估中的小子样问题。本文从区间估计的角度,利用 Bootstrap 法思想,设计了一套适用于可靠度函数和故障率失效函数的参数置信区间估计的算法。主要算法思想为:通过解非线性方程(5)~(7)从原始数据  $x \equiv (x_{1;m;n}^{R_1, \dots, R_m}, x_{2;m;n}^{R_1, \dots, R_m}, \dots, x_{m;m;n}^{R_1, \dots, R_m})$  中估计极大似然估计的参数  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}$ 。运用方程(3)~(4)中  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}$  的值和任务时间  $t$ ,可以得到可靠性和故障函数的极大

似然估计  $\bar{S}(t)$  和  $\bar{H}(t)$ 。采用 Bootstrap 方法,使用上述一样的删失计划  $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ , 利用  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\lambda}$  来生成一个自助样本  $x^*$ 。基于  $x^*$  计算自助样本估计的  $\alpha, \beta, \lambda, S(t), H(t)$ , 定义其估计结果为  $\bar{\alpha}^*, \bar{\beta}^*, \bar{\lambda}^*, \bar{S}^*(t), \bar{H}^*(t)$ 。反复执行  $N$  次进行 Bootstrap 估计, 得到  $N$  个自助样本, 计算出  $N$  个自助极大似然估计的  $\alpha, \beta, \lambda, S(t), H(t)$ 。通过将所有的  $\bar{\alpha}_s^*, \bar{\beta}_s^*, \bar{\lambda}_s^*, \bar{S}^*(t)_s, \bar{H}^*(t)_s$  按升序排序来得到自助样本  $(\varphi_1^l, \varphi_1^{l+1}, \dots, \varphi_1^{l+N})$ ,  $l = 1, 2, 3, 4, 5$ , 其中  $\varphi_1 \equiv \bar{\alpha}^*$ ,  $\varphi_2 \equiv \bar{\beta}^*$ ,  $\varphi_3 \equiv \bar{\lambda}^*$ ,  $\varphi_4 \equiv \bar{S}^*(t)$ ,  $\varphi_5 \equiv \bar{H}^*(t)$ 。令  $G(z) = P(\varphi_1 \leq z)$  是  $\varphi_1$  的累积分布函数, 将  $z$  定义为  $\varphi_{1boot} = G^{-1}(z)$ 。 $\varphi_1$  的  $100(1-\gamma)\%$  的大概自助置信区间为  $[\varphi_{1boot}(\gamma/2), \varphi_{1boot}(1-\gamma/2)]$ 。

算法步骤见图 2。

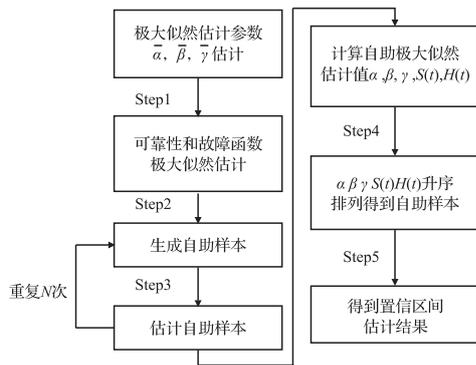


图 2 自助法算法步骤

Fig.2 Bootstrap algorithm step

通过以上分析, 可以较为简便地得出修正威布尔分布参数的区间估计值, 提高估计效率。而相对于其他算法如 Bayes 区间估计方法, 由于其在修正威布尔分布下的似然函数非常复杂, 无法进行积分运算, 只能采用蒙特卡洛马尔科夫算法进行近似计算。虽然 Bayes 方法估算结果较为精确, 几十年来被大量专家学者研究使用, 但由于其较为复杂的计算过程往往不能被工程实际人员所应用。

### 3 实例分析

#### 3.1 点估计结果

参考文献[11]的论文, 本文选取了 50 组观测失效数据集, 见表 1。Aarset 通过分析数据表明, 修正威布尔分布比指数分布和威布尔分布可以更好地拟合这些数据。通过上述 II 型循序删失计划得到删失数据。在本实例中, 循序删失计划下各参数值  $m$

$= 35, n = 50, R_4 = R_{11} = R_{18} = R_{25} = R_{32} = 3$ , 且  $R_i = 0, i \neq 4, 11, 18, 25, 32$ 。然后根据方程组(5)~(7)的点估计算法, 解方程组进一步可得上述参数的极大似然法点估计结果为:  $(\alpha_{ML}, \beta_{ML}, \lambda_{ML}) = (0.0714, 0.398, 0.01702)$ 。

表 1 原始失效数据

Tab.1 Origin data

0.1	0.2	1	1	1	1	1	2	3	6
7	11	12	18	18	18	18	18	21	32
36	40	45	46	47	50	55	60	63	63
67	67	67	67	72	75	79	82	82	83
84	84	84	85	85	85	85	85	86	86

#### 3.2 区间估计结果对比

通过上述设计的基于自助法置信区间估计算法, 完成了 1000 次自助样本参数计算。结果是  $(\alpha, \beta, \lambda, S(t=10), H(t=10)) = (0.070, 0.4095, 0.0178, 0.8097, 0.0124)$ , 基于自助法的参数置信区间估计结果见表 2。基于 Bayes 方法的估计结果见表 3。

表 2 自助法参数的双边 90%和 95%自助置信区间

Tab.2 Two-sided 90% and 95% BCIs based on Bootstrap

参数	90%置信区间			95%置信区间		
	下界	上界	长度	下界	上界	长度
$\alpha$	0.038 0	0.121 6	0.083 6	0.035 5	0.134 6	0.099 1
$\beta$	0.306 2	0.529 2	0.223 0	0.293 3	0.579 0	0.285 7
$\lambda$	0.010 7	0.025 5	0.014 8	0.009 3	0.028 2	0.018 9
$S(t = 10)$	0.651 5	0.852 2	0.200 7	0.626 5	0.873 9	0.247 4
$H(t = 10)$	0.007 6	0.018	0.010 4	0.006 4	0.019 4	0.013 0

表 3 Bayes 方法参数的双边 90%和 95%自助置信区间

Tab.3 Two-sided 90% and 95% BCIs based on Bayes

参数	90%置信区间			95%置信区间		
	下界	上界	长度	下界	上界	长度
$\alpha$	0.035 9	0.114 8	0.078 9	0.031 3	0.126 3	0.094 9
$\beta$	0.225	0.583 8	0.358 8	0.199 4	0.624 3	0.424 9
$\lambda$	0.009 9	0.027 2	0.017 3	0.008 4	0.028 7	0.020 3
$S(t = 10)$	0.690 1	0.849 4	0.159 2	0.671 5	0.861 5	0.189 9
$H(t = 10)$	0.007 5	0.015 9	0.008 5	0.007	0.017	0.01

从表 2 和表 3 的估算结果可以看出, 通过对比本文设计的修正威布尔分布的区间估计方法, 同等置信度水平 90%下, 自助法估计  $\beta, \lambda, S(t=10), H(t=10)$  4 个参数的置信区间均优于 Bayes 方法; 95%置信水平下, 自助法估计的  $\beta, \lambda$  优于 Bayes 方法。因此基于自助法的参数区间估计其结果较为合理、准确。基于 Bayes 方法的区间估计虽然也得出了估计结果, 由于其计算过程复杂, 不利于工程应用, 本文由于篇幅所限不作展开分析。

## 4 结语

目前航空装备故障率通常服从“浴盆曲线”,本文通过引入修正威布尔分布,设计了一种循序Ⅱ型删失数据下极大似然估计(MLE)的点估计和基于自助法的置信区间估计方法,为循序Ⅱ型删失计划下的可靠性评估问题提供了可行方法。案例结果表明,本文所设计的极大似然点估计和基于自助法的置信区间估计能有效对失效数据集的分布参数进行估计,对可靠性数据分析的理论研究和工程应用提供了良好参考。

### 参考文献(References):

- [1] 刘洪于,方洋旺,张平,等.基于导弹现场数据的可靠性评估[J].空军工程大学学报:自然科学版,2012,13(4):41-46.  
LIU Hongyu, FANG Yangwang, ZHANG Ping, et al. The Reliability Assessment Based on Missile Field Data[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2012, 13(4): 41-46. (in Chinese)
- [2] Xie M, Lai C D. Reliability Analysis Using An Additive Weibull Model with Bathtub-Shaped Failure Rate Function[J]. Reliability Engineering & System Safety, 1996, 52: 87-93.
- [3] Wang X, Rabiei M, Hurtado J, et al. A Probabilistic-Based Airframe Integrity Management Model[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2009, 94: 932 - 941.
- [4] Upadhyay SK, Gupta A. A Bayes Analysis of Modified Weibull Distribution via Markov Chain Monte Carlo Simulation[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2010, 80: 241 - 254.
- [5] 唐湘晋,吴新林.基于修正的威布尔分布的最小风险投资组合的理论研究[J].武汉理工大学学报:交通科学与工程版,2007,31(6):1191-1193.  
TANG Xiangjin, WU Xinlin. Theoretical Study of Minimized Risk Portfolio Based on Modified Weibull Distributions[J]. Journal of Wuhan University of Technology: Transportation Science & Engineering, 2007, 31(6): 1191-1193. (in Chinese)
- [6] 胡玉琴,孙立斌,王洪涛,等.高温气冷堆工程验证用国产石墨的强度实验研究[J].科技导报,2012,30(21):41-45.  
HU Yuqin, SUN Libin, WANG Hongtao, et al. Domestic Graphite Strength Test for HTR Engineering Verification [J]. Science & Technology Review, 2012, 30(21): 41-45. (in Chinese)
- [7] Zellner A. Bayesian Estimation and Prediction Using Asymmetric Loss Functions[J]. Journal of the American Statistical Association, 1986; 81: 446 - 451.
- [8] Xie M, Goh M, Tang Y. On Changing Points of Mean Residual Life and Failure Rate Function for Some Generalized Weibull Distribution[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 84: 293-299.
- [9] Reza Pakyari, Balakrishnan N. A General Purpose Approximate Goodness-of-Fit Test for Progressive Type-II Censored Data [J]. IEEE Transaction on Reliability, 2012, 61(1): 238-244.
- [10] Ng HKT. Parameter Estimation for A Modified Weibull Distribution for Progressively Type-II Censored Samples[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2005, 54: 374-380.
- [11] Aarset MV. How to Identify Bathtub Hazard Rate [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1987, 36: 106-108.

(编辑:徐敏)