参数不确定的分数阶混沌系统的完全同步与参数辨识

朱 涛[1]，张广军[1]，李 睿[1]，王相波[1]，董 俊[2]
(1.空军工程大学理学院,陕西西安,710051;2.空军第一航空学院,河南信阳,464000)

摘要 针对分数阶liu混沌系统和参数不确定的分数阶混沌系统的完全同步和参数辨识问题进行研究。首先,基于稳定性理论与反馈控制思想设计同步控制器和估计变量演化规则,在控制器中引入时变增益和估计变量,以获得较好的同步响应速度,其次引用定理对所给同步方法进行理论分析;最后举出实例进行仿真验证。仿真结果表明,该方法能够使异结构混沌系统实现完全同步并可在同步的同时辨识出响应系统的不确定参数,此外由于给出的响应系统的3个实例方程相似,仅参数取值不同,因此该同步方法还可以通过改动响应系统的部分参数,使liu系统在3个不同的混沌系统之间实现同步切换。

关键词 分数阶;混沌同步;参数辨识;时变增益
DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2014.04.021
中图分类号 TJ768.2 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2014)04-0088-04

Parameters Identification and Synchronization of the Fractional-order Chaotic System with Uncertain Parameters

ZHU Tao[1], ZHANG Guang-jun[1], WANG Xiang-bo[1], LI Rui[1], DONG Jun[2]
(1. Science College, Air Force Engineering University, 710051 Xi'an, China;
2. The First Aeronautical College of Air Force, Xinyang 464000, Henan, China)

Abstract: Parameters identification and complete synchronization between the fractional-order chaotic liu system and the factional-order chaotic system with uncertain parameters are investigated in this paper. Firstly, based on the stability theory a synchronistic controller containing a time-varied gain and an estimating variation is proposed, and the estimating variation is a kind of approaching continually to the true value of the uncertain parameters with time evolution. Secondly, the method of synchronization is proved. Finally, some examples are given for simulation and verification. The simulation results show that the parameters identification and the complete synchronization are realized simultaneously by using this method. Furthermore, the equations are identical and only the parameters are different in the three examples, and the switching synchronization can be realized between liu system and three different chaotic systems by altering partial parameters.

Key words: fractional-order; chaotic synchronization; parameters identification; time-varied gain

---

收稿日期:2013-09-03
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2012JM80350)
作者简介:朱 涛(1987—),男,安徽马鞍山人,硕士生,主要从事非线性动力学理论及应用研究.E-mail:422548885@qq.com

引用格式:朱涛,张广军,李睿,等.参数不确定的分数阶混沌系统的完全同步与参数辨识[J].空军工程大学学报:自然科学版,2014,15(4):88-91. ZHU Tao, ZHANG Guangjun, LI Rui, et al. Parameters identification and synchronization of the fractional-order chaotic system with uncertain parameters[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2014, 15(4): 88-91.

自 1990 年 Pecora 与 Carroll 首次提出并成功实现混沌同步以来[1]，混沌同步逐渐成为学术研究的热点之一[2]，已经被成功应用到保密通信[3]、数字信号处理以及生命系统等领域。近几年来，有关参数未知的混沌系统的自适应同步问题受到了广泛关注，文献[4]研究了 2 个参数未知的超混沌系统的修正投影同步；文献[5]研究了参数不确定的异结构混沌系统的自适应广义函数投影滞后同步；文献[6]研究了维数不等的未知混沌系统的自适应函数修正投影同步。该类文献围绕系统不确定参数给出的自适应追踪同步方法具有一定的可应用性[7]，但是在实际应用中由于外部环境因素的影响，混沌系统的某些参数有时会发生变动，从而造成实际应用的混沌系统与预想设计的混沌系统不一致，无法发挥其应用价值。针对该问题，本文在研究分数阶混沌系统的同步问题时，对混沌系统的一些关键参数进行辨识，验证参数的真实值与期望值是否一致，以此来了解混沌系统是否偏离了设计。

1　分数阶 liu 系统、chen 系统、lü 系统、lorenz 系统的描述

文献[8]中分数阶 liu 系统描述为：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^q x_1}{\mathrm{d}t^q}=a(x_2-x_1)\\ \frac{\mathrm{d}^q x_2}{\mathrm{d}t^q}=bx_1-cx_1x_3\\ \frac{\mathrm{d}^q x_3}{\mathrm{d}t^q}=-dx_3+kx_1{}^2\end{cases}\tag{1}$$

当参数 $a=10$，$b=40$，$c=10$，$d=2.5$，$k=4$，分数阶阶次 $q=0.9$ 时，系统处于混沌状态。

文献[9]中分数阶 chen 系统、lü 系统、lorenz 系统均可描述为如下形式：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^q y_1}{\mathrm{d}t^q}=a_1(y_2-y_1)\\ \frac{\mathrm{d}^q y_2}{\mathrm{d}t^q}=d_1y_1-y_1y_3+c_1y_2\\ \frac{\mathrm{d}^q y_3}{\mathrm{d}t^q}=y_1y_2-b_1y_3\end{cases}\tag{2}$$

当参数 $a_1=35$，$b_1=3$，$c_1=28$，$d_1=-7$ 时，系统为分数阶 chen 系统；当参数 $a_1=36$，$b_1=3$，$c_1=20$，$d_1=0$，时系统为分数阶 lü 系统；当参数 $a_1=10$，$b_1=8/3$，$c_1=-1$，$d_1=28$ 时，系统为分数阶 lorenz 系统，并且在 $0.91<q\leqslant 1$ 时，上述各系统均处于混沌状态。

2　异结构的分数阶混沌系统的完全同步与参数辨识

2.1　完全同步描述

考虑如下的分数阶混沌系统

$$\frac{\mathrm{d}^q x}{\mathrm{d}\,t^q}=f(x)\tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}\,t^q}=\mathbf{G}(y)\eta+g(y)+u(x,y)\tag{4}$$

式中：$x=x(t)\in R^n$ 为驱动系统的状态变量；$y=y(t)\in R^n$ 为响应系统的状态变量；η 为系统不确定参数，$\mathbf{G}(y)$为提取不确定参数后的函数矩阵；$g(y)$为等式剩余部分；$u(x,y)$为同步控制器。定义完全同步误差为 $e(t)=y-x$，若满足$\lim\limits_{t\to\infty}\|e(t)\|=0$，则称混沌系统(3)与(4)实现完全同步。

2.2　控制器设计

依据完全同步误差定义，由式(3)与式(4)可推导出完全同步误差微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^q e}{\mathrm{d}\,t^q}=\mathbf{G}(y)\eta+g(y)-f(x)+u(x,y)\tag{5}$$

通过式(5)可将同步问题转变为设计合适的同步控制器以使同步误差在零点渐近稳定的问题。在此，根据分数阶系统稳定性理论设计同步控制器为：

$$u=-g(y)+f(x)-\mathbf{G}(y)\hat{\eta}-ke\tag{6}$$

式中$\hat{\eta}$为辨识不确定参数 η 真实值的估计变量，定义其与参数真实值的误差为$\tilde{\eta}=\hat{\eta}-\eta$(后文均称为参数误差)。此时参数辨识问题转变为设计合理的估计变量演化规则，使得参数误差能够渐近稳定于零。$k=(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}$为引入的时变增益：

$$k_i=\lambda_i e_i^2(\lambda_i>0,i=1,2,3)\tag{7}$$

引入 k 可实现对同步响应速度更好的控制，当同步误差较大时，增益大，误差较小时增益也变小，式中 λ_i 为时变增益的调节系数为常系数。

2.3　liu 系统与参数不确定的混沌系统的完全同步

以系统(1)作为驱动系统，以系统(2)作为响应系统，系统(2)中 a_1，b_1，c_1，d_1 为不确定参数。根据式(3)～式(6)可求解出相应的同步控制器和估计变量演化规则。同步控制器为：

$$\begin{cases} u_1 = -\hat{a}_1(y_2 - y_1) + a(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ u_2 = -\hat{d}_1 y_1 + y_1 y_3 - \hat{c}_1 y_2 + b x_1 - c x_1 x_3 - k_2 e_2 \\ u_3 = -y_1 y_2 + \hat{b}_1 y_3 - d x_3 + k x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \tag{8}$$

估计变量演化规则为:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^q \hat{a}_1}{\mathrm{d}t^q} = (y_2 - y_1) e_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}^q \hat{b}_1}{\mathrm{d}t^q} = -y_3 e_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}^q \hat{c}_1}{\mathrm{d}t^q} = y_2 e_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}^q \hat{d} d_1}{\mathrm{d}t^q} = y_1 e_2 \end{cases} \tag{9}$$

2.4　同步分析

为了说明本文所设计的同步控制器和估计变量演化规则能够使同步误差和参数误差在零点渐近稳定,在此引用参考文献[10]中的一个定理进行理论证明。

构造 J 函数:

$$J = \boldsymbol{MP}\left[\frac{\mathrm{d}^q \boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t^q}\right]^{\mathrm{T}} =$$

$$-k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 \le 0 \ (k_1, k_2, k_3 > 0)$$

($\boldsymbol{M} = [e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1, \tilde{d}_1]$,$\boldsymbol{P}$ 为 7 阶单位矩阵)

上述证明说明同步误差系统(6)与参数误差系统符合引理要求,即可认为驱动-响应系统同步误差与参数误差随时间演化将逐渐趋于零。

3　数值仿真

采用预估-校正算法进行仿真,取参数 $q=0.95$,$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,时间步长 $t=0.01$ s,初始值 $x(0)=[0.5,0.5,0.5]$,$y(0)=[4,1,-3]$,驱动系统中$[a,b,c,d,k]$取值见第 1 节,响应系统中$[a_1,b_1,c_1,d_1]$为不确定参数,现分别以其取值对应 chen 系统参数、lü 系统参数和 lorenz 系统参数为例进行仿真验证,仿真结果见图 1~图 3。

3 个仿真实例验证了文中同步方法的有效性,同时由于 chen 系统、lü 系统、lorenz 系统的微分方程相似,仅参数取值不同,这就使得该方法可以在改动部分参数的情况下,实现不同混沌系统之间的混沌同步。

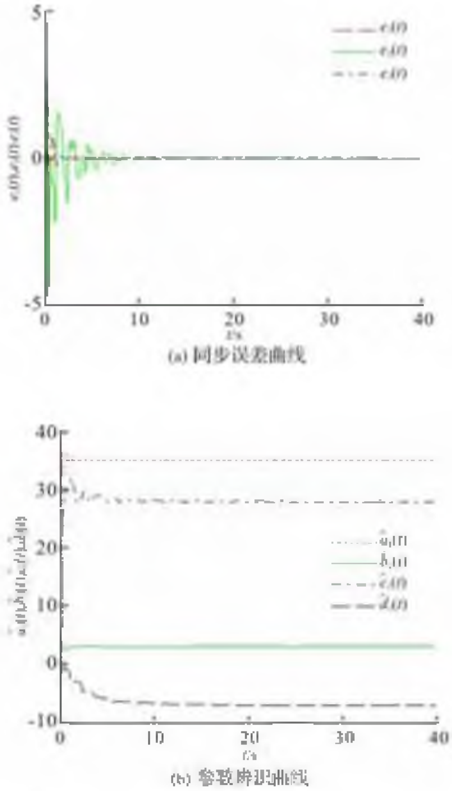

图 1　liu 和 chen 同步误差和参数辨识曲线

Fig.1　Time evolution of synchronization error and parameter identification between liu and chen

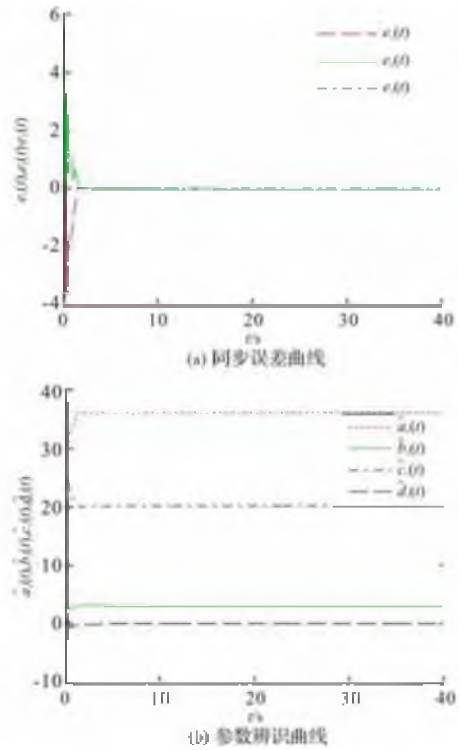

图 2　liu 和 lü 同步误差和参数辨识曲线

Fig.2　Time evolution of synchronization error and parameter identification between liu and lü

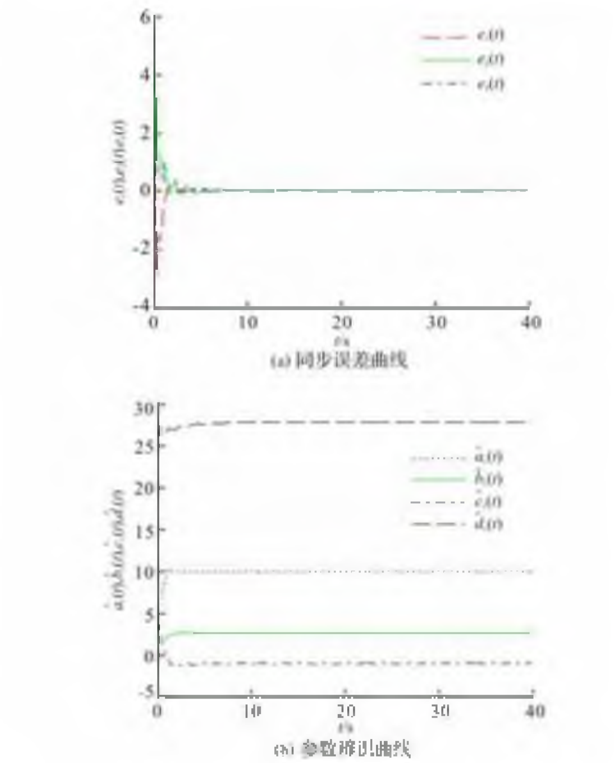

图 3　liu 和 lorenz 同步误差和参数辨识曲线

Fig.3　Time evolution of synchronization error and parameter identification between liu and lorenz

4　结语

本文研究了异结构的分数阶混沌系统在参数不确定情况下的完全同步与参数辨识问题，首先基于稳定性理论设计了同步控制器和估计变量演化规则，在同步控制器中引入时变增益，以此获得了较好的同步响应速度，其次利用 MATLAB 平台进行仿真验证，仿真结果证明了文中所给同步方法的有效性，最后通过对文中的 3 个仿真实例进行对比发现，利用文中的同步方法可以在改动系统部分参数的情况下实现不同混沌系统之间的同步切换，如改变响应系统参数使混沌同步在 liu-chen，liu-lü，liu-lorenz 之间自由变换。

参考文献(References):

[1]　Pecora L M, Carroll T L. Synchronization of chaotic systems [J]. Physical review letters, 1990, 64(8): 821-824.

[2]　董俊，张广军，姚宏，等.异结构超混沌系统的完全同步与反向同步控制[J].空军工程大学学报：自然科学版，2012，13(5)：90-94.
DONG Jun, ZHANG Guangjun, YAO Hong, et al. The control of complete synchronization and anti-phase synchronization for hyper-chaotic systems of different structures[J].Journal of airforce engineering university: natural scienc edition, 2012, 13(5): 90-94. (in Chinese)

[3]　Chee Yi chin, Xu Dsolin. Secure digital communication using controlled projective synchronisation chaos [J].Chaos, solitons and fractals, 2005, 23(3):1063-1070.

[4]　Wu Xiangjun, Lu Hongtao. Adaptive generalized function projective lag synchronization of different chaotic systems with fully uncertain parameters[J]. Chaos, solitons and fractals, 2011, 44(10): 802-810.

[5]　Song Zheng. Adaptive modified function projective synchronization of unknown chaotic systems with different order[J]. Applied mathematics and computation, 2012, 218(10): 5891-5899.

[6]　Tang Yang, Fang Jianan . General methods for modified projective synchronization of hyperchaotic systems with known or unknown parameters[J].Physics Letters A, 2008, 372 (11):1816-1826.

[7]　Yuan Liguo, Yang Qigui . Parameter identification and synchronization of fractional-order chaotic systems [J]. Commun nonlinear sci numer simulat, 2012, 17 (01):305-316.

[8]　Sachin Bhalekar, Varsha Daftardar-Gejji. Fractional ordered Liu system with time-delay [J]. Commun nonlinear sci numer simulat, 2010, 15(8):2178-2191.

[9]　Wu Xiangjun, Li Jie, Chen Guangrong. Chaos in the fractional order unified system and its synchronization [J].Journal of the Franklin institute, 2008, 345(4): 392-401.

[10]　Deng Weihua , Li Changpin, Lü Jinhu. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays[J].Nonlinear dynamic, 2007, 48(4): 409-416.

(编辑:徐敏)