第 14 卷第 4 期 空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版) Vol. 14 No. 4
2013 年 8 月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Aug. 2013

关于 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$的均值估计

樊旭辉， 闫欣荣

(武警工程大学理学院,陕西西安,710086)

摘要 对于任意正整数 n,Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$定义为最小的正整数 m,使得 $n \mid m!!$,其中 $m!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m, & 2 \nmid n \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m, & 2 \mid n \end{cases}$,即 $sdf(n) = \min\{m: n \mid m!!, m \in \mathrm{N}\}$。利用初等及解析方法研究 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$的均值估计,得到一个关于函数 $sdf(n)$的均值估计的渐近公式。从而解决了 Felice Russo 在文献[4]中提出的问题。

关键词 Smarandache 双阶乘函数 sdf(n),均值估计;渐近公式

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2013.04.021

中图分类号 O156.4 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2013)04-0088-03

On the Mean Value of the Smarandache Double Factorial Function

FAN Xu-hui,YAN Xin-rong

(Science College, Engineering University of Armed Police Force, Xi′an 710086, China)

Abstract: For any positive integer , the Smarandache double factorial is defined as the smallest integer such that , where $m!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \mathrm{m}, & 2 \nmid n \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \mathrm{m}, & 2 \mid n \end{cases}$. The paper conducts the study of the mean value of the Smarandache Double Factorial function by the elementary and analytic methods, obtains a sharper asymptotic formula for the Smarandache Double Factorial function , and thus solves the problem proposed by Felice Russo in reference [4] .

Key words: Smarandache double factorial function ; mean value; asymptotic formula

美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache 教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》[1]一书中引入 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$,对于任意正整数 n,Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$定义为最小的正整数 m,使得 $n \mid m!!$,其中 $m!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m, & 2 \nmid n \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m, & 2 \mid n \end{cases}$,即就是 $sdf(n) = \min\{m: n \mid m!!, m \in \mathrm{N}\}$。例如:$sdf(1)=1$, $sdf(2)=2$, $sdf(3)=3$, $sdf(4)=4$, $sdf(5)=5$, $sdf(6)=6$, $sdf(7)=7$, $sdf(8)=4 \cdots$。

关于 $sdf(n)$的性质,有不少学者进行了研究,得到了许多有重要理论价值的研究成果。例如,Gao Jing 在文[2]中研究了 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$与 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$的混合均值问题,证明了下面结论:

对于任意实数 $x \geqslant 2$,有渐近公式:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) sdf(n) = x^2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{a_m}{\log^m x} \right) + O\left(\frac{x^2}{\log^k x} \right)。$$

王晓瑛在文献[3]中讨论了 $sdf\left(\prod_{k=1}^{m} m_k\right)$和 $\sum_{k=1}^{m} sdf(m_k)$的关系,证明了下面结论:

对于任意的正整数 $k \geqslant 4$,存在无穷多个正整数

收稿日期:2012-07-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省自然科学基金资助项目(2011JM1019)

作者简介:樊旭辉(1975－),男,陕西岐山人,副教授,主要从事数论及其应用研究.

E-mail:xuhuifan2050@163.com.

组$(m_1, m_2 \cdots, m_k)$满足方程：

$$sdf\left(\prod_{i=1}^{k} m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} sdf(m_i)$$

Felice Russo 在文献[4]中对函数 $sdf(n)$ 进行了系统研究，得到了一些关于 $sdf(n)$ 的基本性质. 同时，Felice Russo 在文献[4]中提出了若干关于 $sdf(n)$ 的问题，并建议有兴趣的学者进行研究。

乐茂华在文献[5]中应用初等方法对 $sdf(n)$ 进行了研究，得出了关于 $sdf(n)$ 的如下一些性质：

性质 1 设正整数 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，若 $2 \nmid n$，那么：

$$sdf(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{sdf(p_i^{\alpha_1})\} \tag{1}$$

性质 2 如果 $2 \mid n$，且 $n = 2^\alpha n_1$，其中 α, n_1 为正整数且 $2 \nmid n_1$，那么：

$$sdf(n) \leqslant \max\{sdf(2^\alpha), 2sdf(n_1)\} \tag{2}$$

性质 3 设 m, n 为正整数，那么：

$$sdf(mn) \leqslant \begin{cases} sdf(m) + sdf(n), & 2 \mid m, 2 \mid n \\ sdf(m) + 2sdf(n), & 2 \mid m, 2 \nmid n \\ 2sdf(m) + 2sdf(n) - 1, & 2 \nmid m, 2 \nmid n \end{cases} \tag{3}$$

1 定理及推论

本文的主要目的是在 Felice Russo 和乐茂华等研究基础之上，利用初等和解析的方法研究 $sdf(n)$ 的均值估计问题，并给出了一个渐近公式。具体说就是证明了下面的结论：

定理 对于任意实数 $x \geqslant 2$，有渐近公式：

$$\sum_{n \leqslant x} sdf(n) = \frac{5\pi^2}{48}\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{e_i x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

式中 e_i 为可计算的常数。

推论 对于任意正实数 $k < 2$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sdf(n)}{n^k}$ 发散。

2 引理及其证明

为了完成定理的证明，需要如下的引理：

引理 1 对于任意的正整数 n，如果 $P(n)$ 比 n 的最大素因子，那么有如下结论：

当 $P(n) > \sqrt{n}$ 且 $2 \nmid n$ 时，$sdf(n) = P(n)$ (4)

当 $P(n) > \sqrt{n}$ 且 $2 \mid n$ 时，$sdf(n) = 2P(n)$ (5)

当 $P(n) < \sqrt{n}$ 时，$sdf(n) < 4\sqrt{n}\ln n$ (6)

证明：首先，分 2 种情况讨论当 $P(n) > \sqrt{n}$ 时 $sdf(n)$ 的值：

1) 当 $P(n) > \sqrt{n}$ 且 $2 \nmid n$ 时，设 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \cdot P(n)$，其中 p_i 为小于 $P(n)$ 的奇素数，α_i 为正整数$(i = 1, 2, \cdots, k)$。此时容易得 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} < \sqrt{n}$，因此：

$$p_i^{\alpha_i} < \sqrt{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{7}$$

由式(1)，有：

$$sdf(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{sdf(p_i^{\alpha_1}), sdf(P(n))\} \tag{8}$$

由 $sdf(n)$ 的定义并结合式(7)，有：

$$sdf(p_i^{\alpha_i}) \leqslant p_i^{\alpha_i} < \sqrt{n} \tag{9}$$

由 $sdf(n)$ 及 $P(n)$ 的定义，有：

$$sdf(P(n)) = P(n) > \sqrt{n} \tag{10}$$

结合式(8)、(9)和(10)，容易得：

$$sdf(n) = P(n)$$

2) 当 $P(n) > \sqrt{n}$ 且 $2 \mid n$ 时设 n 的标准分解式为 $n = 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} P(n)$，其中 p_i 为小于 $P(n)$ 的奇素数，β_i 为正整数$(i = 1, 2, \cdots, k)$。

如果设 $n_1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \cdot P(n)$，那么 $n = 2^\alpha n_1$。由上述的讨论并结合式(2)，有：

$$sdf(n) \leqslant \max\{sdf(2^\alpha), 2P(n)\} \tag{11}$$

由式(3)，我们有：

$$sdf(2^\alpha) \leqslant 2\alpha \tag{12}$$

因为 $P(n) > \sqrt{n}$，所以 $2^\alpha < P(n)$，因此 $\alpha < P(n)$。由式(12)，我们有：

$$sdf(2^\alpha) \leqslant 2\alpha < 2P(n) \tag{13}$$

结合式(11)、(12)和(13)，有：

$$sdf(n) \leqslant 2P(n)$$

接下来证明此情况下 $sdf(n) = 2P(n)$。

当 $2 \mid n$ 时，设 $sdf(n) = 2m$，m 为正整数，由 $sdf(n)$ 的定义知 $n \mid (2m)!!$，即 $n \mid 2^m m!$；

如果 $sdf(n) < 2P(n)$，那么就有 $n \mid 2^m \cdot m!$ 且 $m < P(n)$，矛盾，因此 $sdf(n) = 2P(n)$。

最后，分 2 种情况讨论 $P(n) < \sqrt{n}$ 时 $sdf(n)$ 的值：

1) 当 $P(n) < \sqrt{n}$ 且 $2 \nmid n$ 时，设 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，结合式(1)和(3)，有：

$$sdf(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{sdf(p_i^{\alpha_1})\} \equiv$$

$$sdf(p^\alpha) \leqslant 2\alpha sdf(p) - 1 < 2\alpha p < 2\sqrt{n}\ln n \tag{14}$$

2) 当 $P(n) < \sqrt{n}$ 且 $2 \mid n$ 时，设 $n = 2^\alpha n_1$，其中 α 为正整数，n_1 为正整数且 $2 \nmid n$，由式(3)，我们有：

$$sdf(2^\alpha) \leqslant \alpha sdf(2) = 2\alpha \leqslant \alpha \cdot P(n) < \sqrt{n}\ln n$$

$$2sdf(n_1) = 2\max_{1 \leqslant i \leqslant k}\{sdf(p_i^{\alpha_i})\} \leqslant 4\alpha_i p_i - 2 < 4\sqrt{n}\ln n。$$

结合以上两式及式(2)，有：

$$sdf(n) < 4\sqrt{n}\ln n。$$

于是完成了引理的证明。

3 定理及推论的证明

将所有正整数分为 3 个集合 A、B 和 C：

$A = \{n: 1 \leqslant n \leqslant x, P(n) > \sqrt{n}$ 且 $2 \nmid n\}$；

$B = \{n: 1 \leqslant n \leqslant x, P(n) > \sqrt{n}$ 且 $2 \mid n\}$；

$C = \{n: 1 \leqslant n \leqslant x, P(n) \leqslant \sqrt{n}\}$。

因此，有：

$$\sum_{n \leqslant x} sdf(n) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} sdf(n) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in B}} sdf(n) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in C}} sdf(n) \quad (15)$$

由式(4)，有：

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} sdf(n) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P(n) > n \\ 2 \nmid n}} sdf(n) = \sum_{\substack{pn \leqslant x \\ n < p \\ (2, n) = 1}} sdf(pn) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (2, n) = 1}} \sum_{n < p \leqslant \frac{x}{n}} p \quad (16)$$

设 $sdf(n)$，于是利用 Abel 求和公式(参阅文献[6]中定理 4.2)及素数定理(参阅文献[7]中定理 3.2)：

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $sdf[Z(n)]$ 为可计算的常数且 $Z[sdf(n)]$，则有：

$$\sum_{n < p \leqslant \frac{x}{n}} p = \frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right) - n\pi(n) - \int_{n}^{\frac{x}{n}} \pi(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2n^2 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i x^2 \ln^i n}{n^2 \ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2 \ln^{k+1} x}\right) \quad (17)$$

式中 $b_i (i = 2, 3 \cdots, k)$ 为可计算的常数。

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^i n}{n^2}$ 对所有的 $i = 1, 2, \cdots, k$ 收敛。结合式(16)和(17)有：

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} sdf(n) = \sum_{\substack{n \leqslant x(\\ (2,, n) = 1}} \left[\frac{x^2}{2n^2 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i x^2 \ln^i n}{n^2 \ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2 \ln^{k+1} x}\right)\right] = \frac{\pi^2}{16} \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right) \quad (18)$$

式中 c_i 为可计算的常数。

类似地，注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^i n}{n^2}$ 对所有的 $i = 1, 2, \cdots, k$ 收敛。由式(5)，有：

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in B}} sdf(n) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P(n) > n \\ 2 \mid n}} sdf(n) = \sum_{\substack{2pn \leqslant x \\ 2n < p}} sdf(2pn) = \sum_{n \leqslant x/2} \sum_{2n < p \leqslant \frac{x}{2n}} 2p = \frac{\pi^2}{24} \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{d_i x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right) \quad (19)$$

式中 d_i 为可计算的常数。

由式(6)，有：

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in C}} sdf(n) < \sum_{n \leqslant x} 4\sqrt{n} \ln n \ll x^{3/2} \ln x \quad (20)$$

结合式(15)、(18)、(19)和(20)，有：

$$\sum_{n \leqslant x} sdf(n) = \frac{5\pi^2}{48} \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{e_i x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)$$

式中 e_i 为可计算的常数。

于是完成了定理的证明。

推论的证明：

因为

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{sdf(n)}{n^k} \leqslant \frac{\sum_{n \leqslant x} sdf(n)}{x^k} \quad (21)$$

结合定理及式(21)，有：

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{sdf(n)}{n^k} \leqslant \frac{\sum_{n \leqslant x} sdf(n)}{x^k} = \frac{5\pi^2}{48} \frac{x^{2-k}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{2-k}}{\ln^2 x}\right) \quad (22)$$

由式(22)，有：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sdf(n)}{n^k} \leqslant \lim_{x \to \infty} \left[\frac{5\pi^2}{48} \frac{x^{2-k}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{2-k}}{\ln^2 x}\right)\right] = +\infty。$$

因此，对于任意正实数 $k < 2$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sdf(n)}{n^k}$ 发散，即证明了推论。

4 结语

本文通过利用初等及解析的方法研究 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$ 的均值估计，得到一个关于函数 $sdf(n)$ 的均值估计的渐近公式。并在此基础上研究了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sdf(n)}{n^k}$ 的敛散性，得到正整数 $k < 2$，级数发散。当正整数 $k \geqslant 2$ 时，级数敛散性这个问题值得进一步研究。

参考文献(References)：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan publishing house, 1993.

[2] Gao Jing, Liu Huaning. On the mean value of smarandache double factorial function[J]. Smarandache notions journal, 2004, 14(1): 193-195.

[3] Wang Xiaoying. On certain equations involving the smarandache double factorial function [J]. Scientia magna, 2008, 4(1): 56-59.

[4] Felice Russo. A set of new Smarandache function, sequences and conjectures in number theory [M]. Lupton: American research press, 2000.

[5] Le Maohua. On the Smarandache double factorial function [J]. Smarandache notions journal, 2002, 13: 209-228.

[6] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spinger-verlag, 1976.

[7] Pan Chendong, Pan Chenbiao. Elementary proof of the prime number theorem [M]. Shanghai: Shanghai science and technology press, 1988.

(编辑：徐楠楠)