

# 一种基于正弦函数的新变步长 LMS 算法

卢炳乾, 冯存前, 龙戈农

(空军工程大学防空反导学院, 陕西西安, 710051)

**摘要** 为解决传统 LMS 算法由于固定步长, 在解决稳态误差与收敛性之间关系时始终处于矛盾状态的问题, 在对固定步长 LMS 算法分析的基础上, 根据变步长 LMS 算法的步长调整原则, 通过构造步长因子  $\mu(n)$  与误差信号  $e(n)$  的非线性函数, 提出了一种基于正弦函数的新变步长 LMS 算法, 并且分析了参数取值对算法性能的影响。理论分析和仿真结果表明: 该算法的收敛速度和稳态误差明显优于固定步长的 LMS 算法和 SVS-LMS 算法。

**关键词** LMS 算法; 变步长; 收敛速度; 稳态误差

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2013.02.011

**中图分类号** TN949 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2013)02-0047-04

## A New Variable Step-size LMS Algorithm Based on Sine Function

LU Bing-qian, FENG Cun-qian, LONG Ge-nong

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** Although the traditional LMS algorithm has many advantages, such as simple methods and small burden in computation, but for the sake of constant step, it is always into contradictions in the relationship between solving the steady-state error and convergence. Based on brief discussion of fixed step-size LMS, and the principle of adjusting step-size for variable step-size LMS algorithm, by constructing a nonlinear function between the step factor and the error signal, a new variable step-size LMS algorithm based on sine function is proposed, along with the performance analysis with regard to different parameters. The theoretical analysis and simulation results show that the convergence speed and steady-state error of this algorithm are better than those of the fixed step-size LMS algorithm and SVS-LMS algorithm.

**Key words:** LMS algorithm; variable step-size; convergence rate; steady-state error

Widrow 和 Hoff 在 1960 年提出了最小均方误差(LMS)算法, 因其具有计算量小, 易于实现等优点, 得到了广泛的注意<sup>[1-3]</sup>。LMS 自适应滤波器是以最小均方误差为准则的最佳滤波器。它是通过自动调节其本身的单位脉冲响应  $h(n)$  特性, 来达到均方误差最小的滤波效果<sup>[4]</sup>。在设计自适应滤波器时, 可以不必预先知道信号与噪声的自相关函数, 而且在滤波过程中, 信号是非平稳信号时, 系统也能自

动调节适应。但是固定步长的 LMS 算法收敛性能不好, 收敛速度和稳态误差间相互矛盾, 即当对收敛结果要求较高时收敛速度很慢<sup>[5-7]</sup>。为了克服这一矛盾, 人们提出了变步长 LMS 算法, 即在 LMS 算法的权系数递推中采用时变步长代替标准 LMS 算法中的固定步长, 通常称为变步长 LMS 算法。本文所提出的算法也是基于变步长的一种新的 LMS 自适应算法。

**收稿日期:** 2012-11-19

**基金项目:** 陕西省自然科学基金资助项目(2010JQ8007)

**作者简介:** 卢炳乾(1988—), 男, 江苏大丰人, 硕士生, 主要从事雷达自适应信号处理研究。E-mail: 815944660@qq.com

## 1 固定步长 LMS 算法

自适应滤波器工作原理见图 1。输入信号  $\mathbf{X}(n)$  经参数可调数字滤波器滤波后产生对输入信号某时刻采样值的估计  $y(n)$ , 参考信号  $d(n)$  (由外部输入) 和估计信号作差, 形成误差信号  $e(n)$ , 然后按照采用的自适应算法对滤波器抽头权向量进行更新, 最终使  $e(n)$  在某种统计准则下达到最优<sup>[8]</sup>。

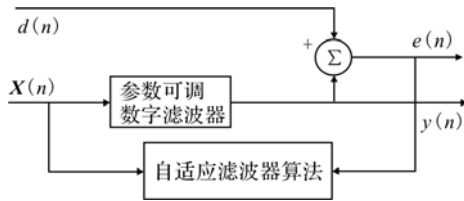


图 1 自适应滤波器原理图

Fig. 1 The theory picture of adaptive filter

LMS 算法是在最速下降算法的基础上发展起来的, 主要的区别是代价函数。最速下降算法用误差均方值作为代价函数, 但每次迭代的梯度向量很难精确测量, 因为这需要知道输入信号的自相关矩阵以及输入信号和期望响应互相关向量等先验特性。LMS 算法直接用瞬时误差功率作为均方误差的估计<sup>[9]</sup>。

LMS 算法的流程如下:

步骤 1 初始化抽头系数, 作为迭代的起点:

$$\mathbf{W}(0) = 0 \quad (1)$$

步骤 2 对输入信号进行滤波, 产生期望响应的估计值:

$$y(n) = \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n) \quad (2)$$

步骤 3 产生估计误差信号:

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (3)$$

步骤 4 更新抽头权向量:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu \mathbf{X}(n) e(n) \quad (4)$$

重复步骤 2 至步骤 4<sup>[8]</sup>。

需要注意的是, LMS 算法是一种随机梯度算法, 每次迭代后抽头权向量更新的方向是完全随机的, 由于对瞬时功率不再进行期望运算, 迭代时会受到梯度噪声的影响。但是这并不会对算法性能造成太大影响, 因为循环迭代的过程本身就是不断对信号进行估计和平均的过程。

## 2 基于正弦函数的新变步长自适应算法

对步长因子的各种改进算法虽然原理不同, 但都遵循同样的调整原则, 即在初始收敛阶段或系统

参数发生变化时选取较大步长, 以便有较快的收敛速度实现对时变系统的跟踪; 而在算法收敛后, 系统获得的权值矢量已经接近最优权值矢量, 需要选取较小的步长, 用以减小稳态误差。

现在满足上述步长调整原则的基础上, 根据文献[10]所提算法的函数图像曲线特征, 提出一种新的基于正弦函数的变步长 LMS 算法。对正弦函数作简单的平移变换, 令  $y = \sin(|x| - \pi/2) + 1$ 。自变量变化很小时, 函数值也变化很小, 见图 2。

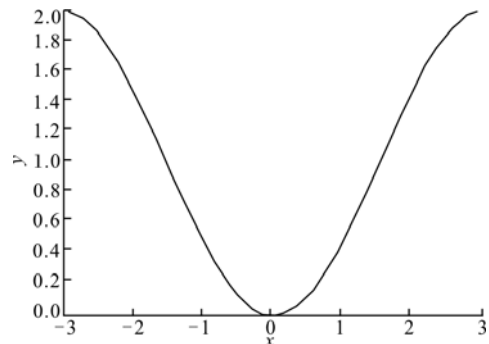


图 2  $y = \sin(|x| - \pi/2) + 1$

Fig. 2 The picture of  $y = \sin(|x| - \pi/2) + 1$  function

由图 2 可以看出,  $y$  所示的函数是一条过原点的光滑曲线, 且在初始阶段  $y$  随  $x$  的变化缓慢; 当  $x$  接近 0 时, 由于函数底部平滑,  $y$  随  $x$  的变化依旧缓慢。

将  $x$  换成  $e(n)$ ,  $y$  换成  $\mu(n)$ ,  $e(n)$  是  $\mu(n)$  的函数, 即得新的步长因子:

$$\mu(n) = \beta [\sin(\alpha |e(n)| - \pi/2) + 1] \quad (5)$$

式中:  $0 < \mu(n) < \lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\max}$  是输入信号自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的最大特征值; 参数  $\beta$  控制步长曲线的取值范围, 影响算法的收敛速度;  $\alpha$  控制步长曲线在误差接近零时的形状。新算法的迭代公式如下:

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n) \quad (6)$$

$$\mu(n) = \beta [\sin(\alpha |e(n)| - \pi/2) + 1] \quad (7)$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu(n) \mathbf{X}(n) e(n) \quad (8)$$

图 3 为  $\beta=1$ ,  $\alpha$  取 0.5, 1, 2 时,  $\mu(n)$  随  $e(n)$  的变化曲线。由图中可以看出  $\mu(n)$  随着  $\alpha$  的增大而增大, 但在误差接近 0 时,  $\mu(n)$  的变化就越剧烈, 不利于减小稳态误差。

图 4 为  $\alpha=1$ ,  $\beta$  取 0.2, 0.5, 1 时,  $\mu(n)$  随  $e(n)$  的变化曲线。由图 4 可知  $\mu(n)$  正比于  $\beta$ , 即增大  $\beta$  可以加快算法的收敛速度, 但为了防止发散,  $\beta$  不宜过大。

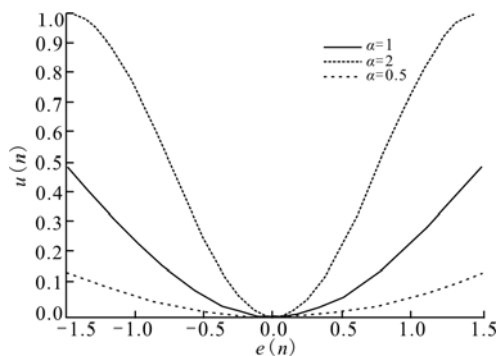


图 3  $\beta=1$ ,  $\alpha$  变化时  $\mu(n)$  随  $e(n)$  变化曲线

Fig. 3  $\beta=1$ , as  $\alpha$  changed, the curve of  $\mu(n)$  along with the change of  $e(n)$

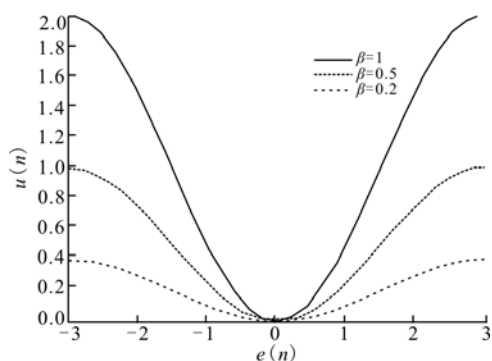
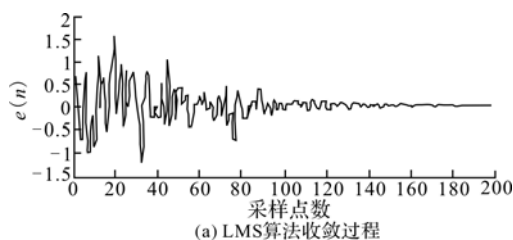


图 4  $\alpha=1$ ,  $\beta$  变化时  $\mu(n)$  随  $e(n)$  变化的曲线

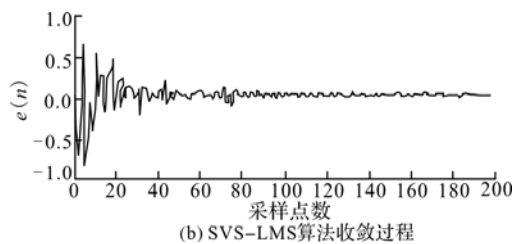
Fig. 4  $\alpha=1$ , as  $\beta$  changed, the curve of  $\mu(n)$  along with the change of  $e(n)$

### 3 仿真分析

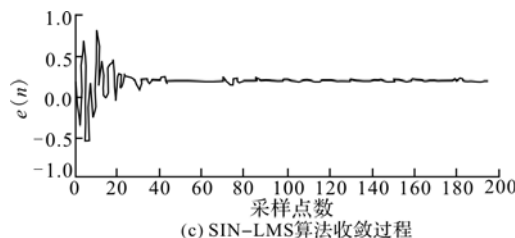
采用 Matlab 工具仿真噪声对消系统对所提算法进行验证。输入信号为单频正弦连续波信号<sup>[11]</sup>, 信号幅度 0.01, 噪声为遮盖性高斯白噪声, 自适应滤波器阶数  $N=2$ , 滤波算法分别选用固定步长 LMS 算法、文献[7]中提出的 SVS-LMS 算法和本文提出的基于正弦函数的变步长算法。仿真中固定步长 LMS 算法步长为  $\mu=0.01$ , 经过多次实验确定; SVS-LMS 算法最优参数选为  $\alpha=0.2, \beta=2$ ; 本文算法最优参数选为  $\alpha=10, \beta=0.04$ , 3 种算法的仿真结果见图 5。以下分别从收敛速度、稳态误差和计算量 3 个主要指标对上述 3 种自适应滤波算法的仿真结果进行分析。



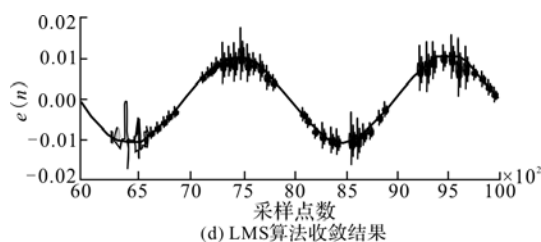
(a) LMS 算法收敛过程



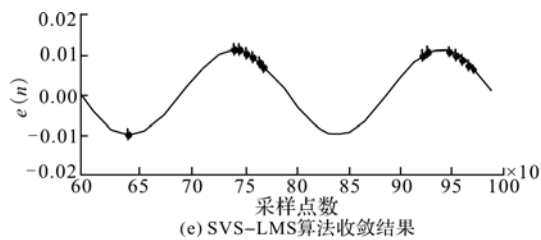
(b) SVS-LMS 算法收敛过程



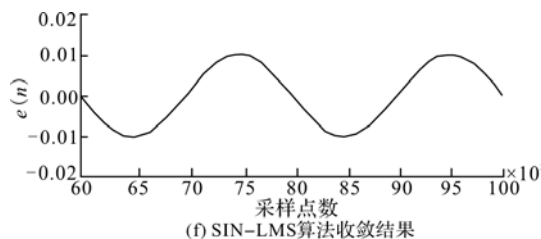
(c) SIN-LMS 算法收敛过程



(d) LMS 算法收敛结果



(e) SVS-LMS 算法收敛结果



(f) SIN-LMS 算法收敛结果

图 5 LMS 算法、SVS-LMS 算法和本文算法自适应滤波仿真结果

Fig. 5 The adaptive filter simulation results of LMS algorithm, SVS-LMS algorithm and the algorithm of this text

#### 3.1 收敛速度

如图 5(a)~(c) 所示, 固定步长 LMS 算法最快也要在第 120 个采样点处才趋于稳态, 文献[7]中提出的 SVS-LMS 算法在第 60 个采样点处趋于稳态。而本文提出的改进算法在第 40 个采样点就已经趋于稳定状态。因此本文所提出的算法比固定步长 LMS 算法和 SVS-LMS 算法收敛速度快。

#### 3.2 稳态误差

如图 5 中(d)~(f) 所示, 固定步长 LMS 算法的稳态误差最大, SVS-LMS 算法的稳态误差比固定

步长 LMS 算法的稳态误差小,本文算法的稳态误差最小。因此,本文算法比固定步长 LMS 算法和 SVS-LMS 算法的稳态误差小。

### 3.3 计算量

通过测量 CPU 运行时间对计算量进行粗略的估计。根据测量结果可知,SVS-LMS 算法 CPU 运行时间为 0.767 s,本文算法 CPU 运行时间为 0.658 s。因此,本文算法的计算量和 SVS-LMS 算法相比有所减小。

通过上面分析可知,本文所提出的算法不仅收敛速度快而且稳态误差小,计算过程也不复杂。因此,本文所提出的算法是合理有效的。

## 4 结语

本文首先介绍了固定步长的 LMS 算法,分析了其收敛性与稳定性是相互矛盾的,提出了变步长 LMS 算法。根据变步长 LMS 算法的步长调整原则提出一种基于正弦函数的新变步长 LMS 自适应算法。通过控制步长因子,在加速收敛的同时,使稳态误差趋于平缓,有效控制了稳态误差的失调量。

### 参考文献(References):

- [1] Stephen W P. Steepest descent algorithms for neural network controllers and filters [J]. IEEE trans on neural networks, 1994, 5(2): 198-212.
- [2] Kwong R H, Johnston E W. Variable step size LMS algorithm [J]. IEEE trans signal processing, 1992, 40(7): 1642-1663.
- [3] Evan J B, Xue P, Liu B. Analysis and implementation of variable step size adaptive algorithm [J]. IEEE trans signal processing, 1993, 41(8): 2517-2535.
- [4] 杨宇,施未来. 变步长 LMS 自适应滤波算法研究[J]. 江苏教育学院学报,2011,27(1):9-10.  
YANG Yu, SHI Weilai. Implementation of adaptive filter on wave-generated magnetic noise based on LMS algorithm [J]. Journal of Jiangsu institute of education, 2011, 27 (1):9-10. (in Chinese)
- [5] 吕春英,敖伟,张洪顺. 一种新的变步长 LMS 算法[J]. 通信技术, 2011,44(3):11-14.  
LU Chunying, AO Wei, ZHANG Hongshun. A new variable step size LMS algorithm [J]. Communication technology,2011, 44 (3):11-14. (in Chinese)
- [6] 沈福民. 自适应信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2001.  
SHEN Fumin. Adaptive signal processing [M]. Xi'an: Xi'dian university press, 2001. (in Chinese)
- [7] Sristi P, Lu W S, Antoniou A. A new variable-step-size LMS algorithm and its application in subband adaptive filtering for echo cancellation[J]. IEEE international symposium,2012(6):721-724.
- [8] 靳翼. 变步长 LMS 自适应均衡算法研究及其在 DSP 上的实现 [D]. 成都:电子科技大学,2010.  
JIN Yi. Research on variable step LMS adaptive equalization algorithm and its implement on DSP [D]. Chengdu: University of electronic science and technology of China,2010. (in Chinese)
- [9] 李洪兵. 时域变步长最小均方自适应滤波算法研究 [D]. 西安:空军工程大学,2008.  
LI Hongbing. Research on time domain variable step size LMS adaptive filtering algorithm [D]. Xi'an: Air force engineering university,2008. (in Chinese)
- [10] 覃景繁,韦岗. 基于 S 型函数的变步长 LMS 自适应滤波算法 [J]. 无线电工程,1996,26(4):44-47.  
QIN Jingfan, WEI Gang. The variable step size LMS adaptive filtering algorithm based on S function [J]. Radio engineering, 1996,26(4):44-47. (in Chinese)
- [11] 李昌玺,毕红葵,张兵,等. 一种改进的高超声速目标跟踪算法[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2012,13(5):50-54.  
LI Changxi, BI Hongkui, ZHANG Bing, et al. An improved tracking algorithm for hypersonic targets [J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2012,13(5):50-54. (in Chinese)

(编辑:田新华)