

# MIMO 雷达多目标角度估计的空间平滑改进算法

田海林<sup>1</sup>, 冯存前<sup>1</sup>, 章捷<sup>1</sup>, 刘超<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学导弹学院, 陕西三原, 713800; 2. 陆航驻北京地区军事代表室, 北京, 100176)

**摘要** 针对基于阵列协方差矩阵特征分解的子空间类算法存在的问题, 提出了一种基于改进空间平滑的新方法。首先介绍了“等效信源”的概念, 在此基础上分析了当目标数多于发射阵元数时, 一些基于子空间类算法失效的原因; 从理论上推导说明了在接收阵元数足够多的情况下, 本文算法可突破发射阵元数对可估计目标数的限制的机理, 从而使得 MIMO 雷达在发射阵元数较少时能估计更多的目标。仿真结果表明: 本文所提方法具有比 TDS 算法更好的估计性能。

**关键词** MIMO 雷达; DOA 估计; 空间平滑; 子空间类算法

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2012.02.009

**中图分类号** TN95 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2012)02-0039-05

在传统的雷达系统中, 随着目标相对于接收和发射机的角度变化, 目标的雷达横截面积 RCS (Radar Cross Section, RCS) 会发生起伏, 从而导致目标的检测和估计性能下降。多输入多输出 MIMO (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO) 通信系统可以克服无线信道衰落效应, 对于独立的多径衰落, MIMO 通信接收机的平均信噪比几乎保持不变。受此启发, Fishler 等人提出了 MIMO 雷达<sup>[1-2]</sup>的概念。与 MIMO 通信系统类似, MIMO 雷达系统对于目标的 RCS 起伏不敏感。此外, MIMO 雷达可以实现灵活的发射分集设计<sup>[3-4]</sup>, 具有高分辨率的空间谱估计性能<sup>[5-6]</sup>。

为了将子空间类算法应用于 MIMO 雷达中, 一些学者对此进行了研究。文献[7]将文献[6]中的模型扩展到多目标的情况, 同时证明了在实际中“有效信源”协方差矩阵几乎总是非奇异的, 从而将 MUSIC 算法直接用于多目标的 DOA 估计中; 文献[8]提出了一种二维 ESPRIT 算法, 实现了 ESPRIT 算法在 MIMO 雷达中的应用并取得了较好的估计性能; 文献[9]提出了一种发射分集平滑 TDS (Transmission Diversity Smoothing, TDS) 算法, 该算法采用发射分集平滑技术来对等效信号模型<sup>[3]</sup>中的虚拟阵列进行平滑, 从而实现目标信号的“解相干”, 然后运用 MUSIC 算法来实现对多目标 DOA 的估计。然而, 上面所提的算法所能估计的目标数不仅受限于接收阵元数, 而且还受限于发射阵元数。当接收阵元数足够多时, 若发射阵元数小于目标数, 数据协方差矩阵会出现秩损, 从而造成对目标 DOA 的错误估计。

为了使 MIMO 雷达在发射阵元数较少时能估计更多的目标, 本文提出了一种基于改进空间平滑的 MIMO 雷达多目标 DOA 估计新方法, 并通过理论推导分析了该方法的有效性。

## 1 信号模型

考虑一个具有  $M_t$  个发射阵元,  $M_r$  个接收阵元的 MIMO 雷达系统, 且发射和接收阵列均为均匀线阵。为了保证不出现估计模糊, 取接收阵元间距为  $\lambda/2$  ( $\lambda$  为载波波长), 并记发射阵元间距为  $d_t$ , 且  $d_t = K\lambda/2$ ,  $K$  为正整数。假设在 MIMO 雷达系统远场存在  $N$  个目标, 其 DOA 分别为  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )。因此, 接收的数据矢量可表示为<sup>[10]</sup>:

\* 收稿日期: 2011-09-01

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2010JQ8007)

作者简介: 田海林(1978-), 男, 陕西兴平人, 讲师, 硕士, 主要从事防空武器系统雷达信号处理和电子对抗技术研究。

E-mail: fengcunqian@sina.com

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_r \text{diag}(\alpha) \mathbf{A}_t^T \mathbf{S}_t + \mathbf{Z} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{A}_r = [\mathbf{a}_r(\theta_1), \mathbf{a}_r(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_r(\theta_N)]$ , 其中  $\mathbf{a}_r(\theta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 为接收阵列对应于第  $i$  个目标导向矢量;  $\mathbf{A}_t = [\mathbf{a}_t(\theta_1), \mathbf{a}_t(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_t(\theta_N)]$ , 其中  $\mathbf{a}_t(\theta_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 为发射阵列对应于第  $i$  个目标导向矢量;  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]$ ,  $\alpha_i$  为与目标 RCS 相关的目标复幅度;  $\mathbf{S}_t$  是发射信号矢量;  $\mathbf{Z}$  为加性高斯白噪声。

为分析方便, 作如下定义:

$$\mathbf{S} \triangleq \text{diag}(\alpha) \mathbf{A}_t^T \mathbf{S}_t \quad (2)$$

这里称  $\mathbf{S}$  为“等效信源”。因此, “等效信源”的协方差矩阵为:

$$\mathbf{P}_s = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H] = \text{diag}(\alpha) \mathbf{A}_t^T \mathbf{S}_t \mathbf{S}_t^H \mathbf{A}_t \text{diag}(\alpha^*) \quad (3)$$

若发射的信号为正交信号, 则:

$$\mathbf{P}_s = \text{diag}(\alpha) \mathbf{A}_t^T \mathbf{A}_t^* \text{diag}(\alpha^*) \quad (4)$$

因为  $\text{rank}\{\text{diag}(\alpha)\} = N$ , 而  $\text{rank}(\mathbf{A}_t) = \min(M_t, N)$ , 所以  $\text{rank}(\mathbf{P}_s) = \min(M_t, N)$ 。若目标数大于发射阵元数, 即  $N > M_t$ ,  $\text{rank}(\mathbf{P}_s) = M_t < N$ , “等效信源”协方差矩阵出现秩损。因此, 子空间类算法将会失效。

## 2 本文算法

### 2.1 算法理论分析

由式(1)、式(4)可得, 接收数据的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_X = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}_r \mathbf{P}_s \mathbf{A}_r^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{M_r} \quad (5)$$

式中:  $\sigma^2$  为噪声功率;  $\mathbf{I}_{M_r}$  为  $M_r \times M_r$  的单位阵。

空间平滑算法利用均匀线阵的空间平移不变性, 将接收阵列分成相互交错的  $p$  个子阵, 每个子阵的阵元数为  $m$ , 即有  $M_r = m + p - 1$ 。因为阵列噪声为高斯白噪声, 则常规的前向空间平滑矩阵可以表示成一个  $m \times m$  的协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_m^{ii} = \mathbf{A}_m \mathbf{D}^{i-1} \mathbf{P} (\mathbf{D}^{i-1})^H \mathbf{A}_m^H + \sigma^2 \mathbf{I}_m, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{R}_m^{ii} = \mathbf{R}(i; M_r + i - p, i; M_r + i - p)$ ,  $\mathbf{A}_m$  是参考子阵 (通常是最左边子阵)  $m \times N$  的阵列流形,  $\sigma^2$  为噪声功率,  $\mathbf{D} = \text{diag}[e^{-j\beta_1}, e^{-j\beta_2}, \dots, e^{-j\beta_N}]$ ,  $\beta_n = \pi \sin \theta_n$ 。对应的后向平滑表达式为:

$$\bar{\mathbf{R}}_m^{ii} = \mathbf{J} (\mathbf{R}_m^{ii})^* \mathbf{J}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (7)$$

式中矩阵  $\mathbf{J}$  为  $M_r$  阶置换矩阵。常规的前向平滑、后向平滑和前后向平滑算法的表达式可以表示为:

$$\mathbf{R}_f = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \mathbf{R}_m^{ii} \quad (8) \quad \mathbf{R}_b = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{\mathbf{R}}_m^{ii} \quad (9) \quad \mathbf{R}_{fb} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_f + \mathbf{R}_b) = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^p [\mathbf{R}_m^{ii} + \bar{\mathbf{R}}_m^{ii}] \quad (10)$$

为了增加可估计的目标数, 这里采用改进的空间平滑算法来对接收数据进行预处理。本文提出的改进空间平滑算法, 是在常规空间平滑算法的基础上, 将所有子阵自相关矩阵进行互相关以及各对称位置上的子阵互相关矩阵进行互相关之后, 求和平均得到等效空间平滑矩阵, 目的是加强主对角线上的元素对等效的空间平滑矩阵的影响并充分利用各子阵间的互相关信息, 使接收数据得到更充分的利用, 从而提高算法的统计估计性能。计算公式如下:

$$\tilde{\mathbf{R}}_f = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\mathbf{R}_m^{ii} \mathbf{R}_m^{jj} + \mathbf{R}_m^{ij} \mathbf{R}_m^{ji}) \quad (11) \quad \tilde{\mathbf{R}}_b = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\bar{\mathbf{R}}_m^{ii} \bar{\mathbf{R}}_m^{jj} + \bar{\mathbf{R}}_m^{ij} \bar{\mathbf{R}}_m^{ji}) \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{fb} = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{R}}_f + \tilde{\mathbf{R}}_b) \quad (13)$$

对于改进的前向空间平滑算法, 由式(11)有:

$$\tilde{\mathbf{R}}_f = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\mathbf{R}_m^{ii} \mathbf{R}_m^{jj} + \mathbf{R}_m^{ij} \mathbf{R}_m^{ji}) = \mathbf{A}_m \tilde{\mathbf{P}}_f \mathbf{A}_m^H + \sigma^4 \mathbf{I}_m \quad (14)$$

式中  $\tilde{\mathbf{P}}_f$  为改进前向平滑算法等效的信源协方差矩阵。

由文献[11]可知加权前向空间平滑算法可以表示为下式:

$$\tilde{\mathbf{R}}_f^w = \frac{1}{p} \sum_{i,j=1}^p w_{i,j}^w \mathbf{R}_m^{ij} \quad (15)$$

将式(6)代入上式并化简可得:

$$\tilde{R}_f^w = \frac{1}{p} A_m \left( \sum_{i,j=1}^p w_{ij} D^{i-1} P(D^{j-1})^H \right) A_m^H + \sigma^2 I_m = \frac{1}{p} A_m \left( \sum_{i,j=1}^p w_{ij} D^{i-1} P(D^{j-1})^H + \sum_{i=1}^p w_i D^{i-1} P(D^{i-1})^H \right) A_m^H + \sigma^2 I_m \quad (16)$$

由式(14)可得:

$$\tilde{R}_f = \frac{1}{2p} A_m \left( \left( \sum_{i,j=1}^p w_{ij} + 2\sigma^2 \right) \left( \sum_{i,j=1}^p D^{i-1} P(D^{j-1})^H \right) + 2 \left( \sum_{i=1}^p w_i + \sigma^2 \right) \left( \sum_{i=1}^p D^{i-1} P(D^{i-1})^H \right) \right) A_m^H + \sigma^4 I_m \quad (17)$$

式中  $w_{ij} = S^H (D^{i-1})^H A_m^H A_m D^{j-1} S$ 。

通过比较式(16)和式(17)可以看出:改进的前向空间平滑算法实质上是一种加权空间平滑算法。由式(7)、(12)和(13)可知:改进的前后向空间平滑算法实质上也是一种加权空间平滑算法。因此,本文算法都可将“等效信源”的协方差矩阵的秩恢复为  $N$ 。

通过比较可以看出:本文所提的算法在接收阵元数足够多的情况下,可估计的目标数不再受发射阵元数的限制。此时,子空间类算法(如 MUSIC)就可用来估计目标的 DOA。

## 2.2 算法性能分析

不失一般性,这里取 TDS 算法来与本文算法进行比较。考虑一个具有  $M_t$  个发射阵元,  $M_r$  个接收阵元的 MIMO 雷达系统,发射和接收阵列均为均匀线阵。对于 TDS 算法,最多可估计的目标数为  $\min(M_t, M_r - 1)$ ;而对于本文算法,若  $K > p - 1$ ,最多可估计的目标数为  $\min[2pM_t, M_r - p]$ 。表1给出了 TDS 算法和本文算法最多可估计目标数的比较。由表中的数据可以看出:TDS 算法最多可估计的目标数不仅受限于接收阵元数,而且受限于发射阵元数,而本文算法在接收阵元数较多时,通过合理地选择  $K$  和  $p$ ,可突破发射阵元数的限制。这意味着在接收阵元数大于发射阵元数时,本文算法可估计的目标数要多于 TDS 算法。

表1 TDS 算法和本文算法最多可估计目标数的比较

Tab.1 The comparison of target number both introduced by TDS and arithmetic in this paper

$M_t$	$M_r$	$p$	TDS 算法	本文算法
4	4	1	3	3
4	8	1	4	7
4	10	1	4	8
4	12	1	4	8
4	12	2	4	10

## 3 仿真分析

为了验证本文算法的有效性,本节将 TDS 算法与本文算法作了仿真比较。仿真中假设 MIMO 雷达系统中发射和接收阵均为均匀线阵,其中发射阵间距为  $K$  倍波长,接收阵间距为  $0.5$  倍波长。信噪比定义为  $S/N = 10 \lg(\sigma_s^2/\sigma_n^2)$ ,其中  $\sigma_s^2$  为发射信号功率,  $\sigma_n^2$  为噪声功率,采样快拍数为 256。这里采用 MUSIC 算法来估计各目标的 DOA。

仿真1:目标数不同时,本文算法和 TDS 算法的空间谱。

仿真过程中,取发射阵元数  $M_t = 4$ ,接收阵元数  $M_r = 12$ ,  $K = 2$ ,信噪比为 10 dB,图1-3分别给出了目标数为2、8和10时,本文算法和 TDS 算法的空间谱曲线。图1中2个目标的角度分别为  $0^\circ$  和  $10^\circ$ ;图2中8个目标的角度分别为  $-50^\circ$ 、 $-40^\circ$ 、 $-20^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $40^\circ$  和  $60^\circ$ ;图3中10个目标的角度分别为  $-60^\circ$ 、 $-50^\circ$ 、 $-30^\circ$ 、 $-10^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $20^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $40^\circ$  和  $60^\circ$ 。

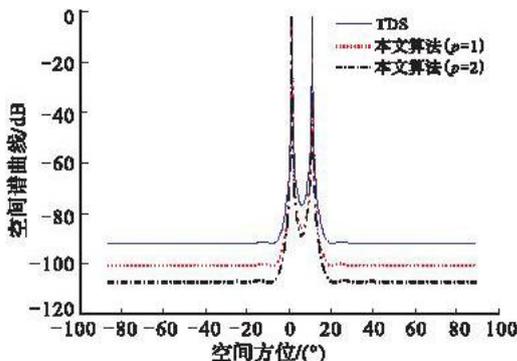


图1 目标数为2时

Fig.1 When there are 2 targets

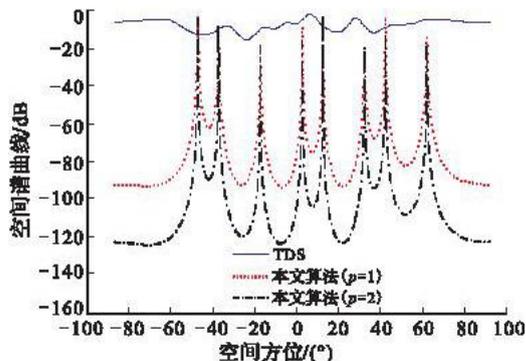


图2 目标数为8时

Fig.2 When there are 8 targets

从图1中可以看出:本文算法( $p=1, p=2$ )和TDS算法均可较为准确地估计出来2目标的DOA,但本文算法( $p=1, p=2$ )的空间谱分辨率要高于TDS算法;图2说明TDS算法所能估计的目标数受发射阵元数的限制,当目标数大于发射阵元数时,TDS算法失效,而此时本文算法( $p=1, p=2$ )仍可准确地估计出各目标的DOA;图3中,当目标数达到10时,TDS算法和本文算法( $p=1$ )已完全失效,而本文算法( $p=2$ )仍可估计出各目标的DOA,这与表1的分析是一致的,进一步证明了前面理论分析的正确性。

仿真2:本文算法和TDS算法的统计性能比较。

取发射阵元数  $M_t=4$ ,接收阵元数  $M_r=8$ ,空间中2个目标的角度分别为  $0^\circ$ 和  $5^\circ$ ,信噪比从  $-10$  dB按步长  $1$  dB变化到  $20$  dB。仿真结果为100次蒙特卡罗实验(每个SNR点做100次Monte-Carlo仿真)的统计结果,图4-6分别给出了几种算法估计成功概率、估计偏差、均方根误差(RMSE)随SNR变化的比较曲线。

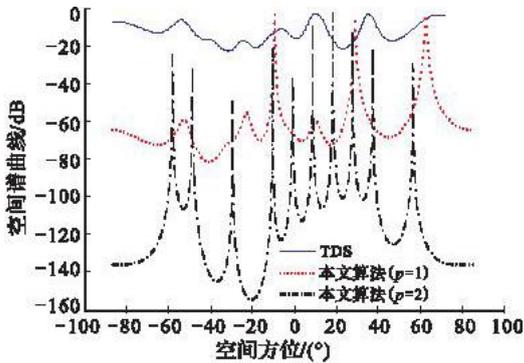


图3 目标数为10时

Fig. 3 When there are 10 targets

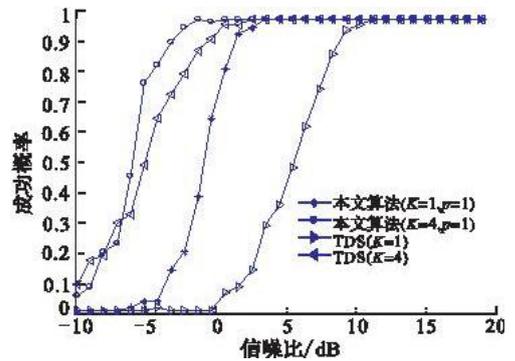


图4 成功概率比较曲线

Fig. 4 The odds of achieving

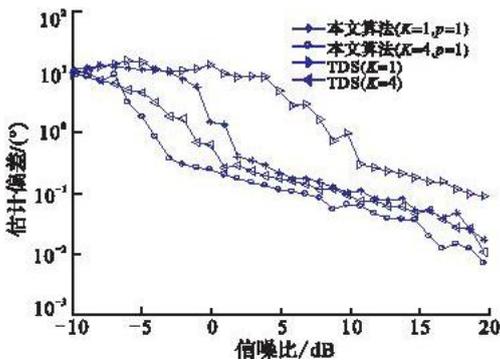


图5 估计偏差比较曲线

Fig. 5 The deviation of estimation comparison

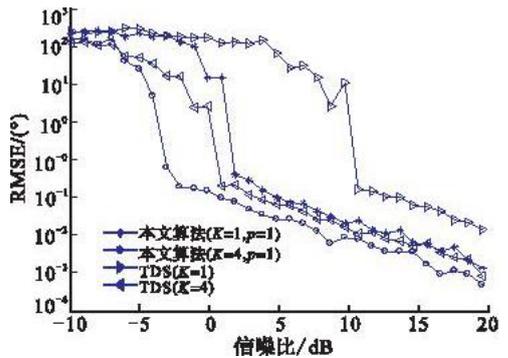


图6 均方根误差比较曲线

Fig. 6 The root mean square error (RMSE) comparison

从蒙特卡罗仿真结果可以看出:对于相同的发射阵间距( $K$ 相同),本文算法的分辨门限、估计偏差和估计的均方根误差要低于TDS算法,即其估计性能要好于TDS算法;而随着 $K$ 值的增大,无论是TDS算法还是本文算法,其统计估计性能均有显著的提高。

## 4 结束语

本文提出了“等效信源”的概念,分析了当目标数大于发射阵元数时,TDS等基于子空间类算法失效的原因,在此基础上应用改进的空间平滑算法,验证了当  $K > p - 1$  时,本文算法最多可估计的目标数为  $\min[2pM_t, M_r - p]$ ,从而使得本文算法在接收阵元数较多的情况下,可估计的目标数要明显多于TDS等算法。仿真结果表明本文算法的统计估计性能优于TDS算法。

## 参考文献(References):

- [1] Fishler E, Haimovich A, Blum R S, et al. MIMO radar: An idea whose time has come [C]//Proceedings of the IEEE conference on radar. Philadelphia, Pennsylvania: IEEE press, 2004: 71-78.

- [2] 何子述,韩春林,刘波. MIMO 雷达概念及其技术特点分析[J]. 电子学报,2005,33(12A):143-147.  
HE Zishu, HAN Chunlin, LIU Bo. MIMO radar and its technical characteristic analyses [J]. Acta electronica sinica, 2005, 33(12A):143-147. (in Chinese)
- [3] Bekkerman I, Tabrikian J. Target detection and localization using MIMO radars and sonars [J] IEEE trans on signal processing,2006,54(10):3873-3883.
- [4] Stoica P, Li J, Xie Y. On probing signal design for MIMO radar [J]. IEEE trans on signal processing, 2007, 55(8):4151-4161.
- [5] Xu L, Li J. Iterative generalized-likelihood ratio test for MIMO radar[J]. IEEE trans on signal processing, 2007, 55(6):2375-2385.
- [6] Lehmann N H, Pishler E, Haimovich A M, et al. Evaluation of transmit diversity in MIMO radar direction finding[J]. IEEE trans on signal processing, 2007, 55(5), 2215-2225.
- [7] Wei Xia, Zishu He, Yuyu Liao. Subspace-based method for multiple-target localization using MIMO radar [C]//IEEE international symposium on signal processing and information technology. Cairo:IEEE press,2007,715-720.
- [8] Miao H, Juntti M, Yu K. 2-D Unitary esprit based joint AOA and AOD estimation for MIMO system [C]//IEEE 17th international symposium on personal indoor and mobile radio communications. [S. l.]:Elektrobit Ltd,2006:1-5.
- [9] Tabrikian J, Bekkerman I. Transmission diversity smoothing for multitarget localization [C]//Proc ICASSP 05. Philadelphia, PA, USA:[s. n.],2005:1041-1044.
- [10] Jian Li, Petre Stoica. MIMO radar signal processing [M]. Newtersey: John Wiley & Sons, Inc. 2009, 155-158.
- [11] 王布宏,王永良,陈辉. 相干信源波达方向估计的加权空间平滑算法[J]. 通信学报,2003,24(4):31-40.  
WANG Buhong, WANG Yongliang, CHEN Hui. Weighted spatial smoothing algorithm for direction of arrival estimation of coherent sources[J]. Journal of China institute of communications, 2003,24(4):31-40. (in Chinese)

(编辑:田新华)

## Angle Estimation Algorithm of MIMO Radar for Multiple Targets Based on Improved Spatial Smoothing

TIAN Hai-lin<sup>1</sup>, FENG Cun-qian<sup>1</sup>, ZHANG Jie<sup>1</sup>, LIU Chao<sup>2</sup>

(1. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China; 2. Military Representative office of Army Aviation in Beijing, Beijing 100176, China)

**Abstract:** Subspace-based algorithms, which provide high spectrum resolution and is of less time-consuming, are the classical and commonly used methods. However, there are still problems when applying the algorithms to MIMO radar. To solve the problem of the DOA estimation of multiple targets for MIMO radar, a new method based on improved spatial smoothing is proposed. The concept of "equivalent sources" is introduced, based on it, the reason why several subspace-based algorithms would fail when the number of targets is more than the number of transmit antennas is analyzed. The mechanism of the proposed method to overcome the limitation of the number of transmit antennas in the condition of sufficient receive antennas is derived and expounded, which makes the MIMO radar estimate more targets in the case of fewer transmit antennas. The simulation results demonstrate that the proposed method has a better estimated performance than the TDS.

**Key words:** MIMO radar; DOA estimation; spatial smoothing; subspace-based algorithm