第 12 卷第 5 期 空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版) Vol.12 No.5
2011 年 10 月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Oct.2011

*

基于非相干准则的压缩感知观测矩阵设计的极大极小方法

李炳杰, 吕 园, 叶 萌, 李广飞
(空军工程大学理学院,陕西 西安 710051)

摘要 针对固定的正交基,利用观测矩阵与稀疏基的非相干准则,研究确定性观测矩阵的设计问题。观测矩阵与稀疏基的相干性越小,压缩采样所需的观测个数就越少,包含原始信号的信息就越多,重构概率越高。根据观测矩阵与稀疏基的相干性定义,对固定的已知正交基,构建满足最优非相干性的极大极小问题,寻找与正交基最不相干的观测矩阵。最后,以固定正交基为离散余弦基的情形为算例,与常用观测矩阵对应的相干性做比较,验证了本文方法的有效性。

关键词 压缩感知;稀疏基;观测矩阵;极大极小方法
DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2011.05.017
中图分类号 TN911.72 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2011)05-0081-04

压缩感知理论指出[1]:如果信号在某个变换域是稀疏的或可压缩的,则可利用与变换矩阵非相干的观测矩阵将变换系数线性投影为低维观测向量,这种低维投影仍能保证后续处理中能从压缩观测中重构原信号或其稀疏表示,通过进一步设计重构算法就能够从低维观测向量精确地或高概率精确地重构原始高维信号。建立稳定的、与变换不相干的降维观测方式,保证稀疏信号压缩时不破坏重要信息是压缩感知理论的3个核心问题之一[1-3]。观测矩阵设计是压缩采样理论的核心,直接决定了压缩采样理论是否能够成功实现。观测矩阵既可以是随机矩阵也可以是确定性矩阵。由于信号重构问题是以一个欠定方程组为约束条件的优化问题,所以观测矩阵的有限等距性质(Restricted Isometry Property,RIP)以及与稀疏基的非相干准则[4]至关重要。RIP 给出了欠定方程存在确定解的充要条件。然而,判断给定的欠定方程组系数矩阵是否具有 RIP 性质是一个组合复杂度问题,但如果能保证观测矩阵和稀疏基不相干,则欠定方程组系数矩阵在很大概率上满足 RIP 性质。高斯矩阵与大多数固定正交基构成的矩阵不相关,因此在现有研究中通常被选择作为观测矩阵。在压缩感知理论中,对观测矩阵的约束是比较宽松的,Donoho 给出了观测矩阵所必需具备的 3 个条件[5],并指出大部分一致分布的随机矩阵都具备这些条件,均可作为观测矩阵,这与对 RIP 性质进行研究得出的结论相一致。目前,用于压缩感知的观测矩阵主要有以下几种:高斯随机矩阵,二值随机矩阵(伯努力矩阵),傅立叶随机矩阵,哈达玛矩阵,一致球矩阵等。但是,上述各种观测矩阵都是随机的,仅仅能保证以很高的概率去恢复信号。目前,对于稳定的重构算法是否存在一个最优的确定性(非随机)的观测矩阵仍然是一个有待研究的问题。本文针对 K-稀疏或可压缩信号的情形,研究利用观测矩阵与稀疏基的非相干准则设计相应的最优确定性观测矩阵的设计算法,提出基于非相干准则的极大极小方法。

1 非相干性准则及相关定理

设 $x \in \mathbf{R}^N$ 为原始数据,$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_N)$ 为某一组 $N \times N$ 的正交基,$\boldsymbol{x} = \Psi\ \Theta$,$\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_N)^{\mathrm{T}}$ 为稀疏投影,显然,$\Theta = \Psi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$。设 $M \times N$ 的矩阵 Φ 为观测矩阵,观测为 $\boldsymbol{y} = \Phi\boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{y} = \Phi\Psi\Theta = \boldsymbol{A}^{CS}\Theta$, $M \times N$ 的

* 收稿日期:2011-04-18
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2011JM8031)
作者简介:李炳杰(1963-),男,甘肃会宁人,教授,主要从事最优控制数值算法以及最优化理论研究.
E-mail:libingjie45@yahoo.com.cn

矩阵 $\boldsymbol{A}^{CS}$ 称为信息算子,其中,$M \ll N$。如果原始数据 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^N$ 本身是稀疏的,则 $\boldsymbol{y} = \Phi \boldsymbol{x}, \Phi = \boldsymbol{A}^{CS}$。

在压缩感知理论中,采样速率不再取决于信号带宽,而在很大程度上取决于稀疏性和非相干性 2 个基本准则。

定义 1(相干性) 假设(Φ, Ψ)是一对 $N \times N$ 的正交基,满足 $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi = \boldsymbol{I}, \Psi^{\mathrm{T}}\Psi = \boldsymbol{I}$。令 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{CS} = \Phi\Psi, \mu(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{cs}) = \sqrt{N} \max\limits_{1 \leqslant k,j \leqslant N} |\widetilde{\boldsymbol{A}}^{cs}_{k,j}|$,定义正交基对$(\Phi, \Psi)$的相干性为:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max_{1 \leqslant k,j \leqslant N} |\langle \Phi_k, \Psi_j \rangle| \tag{1}$$

显然,$\widetilde{\boldsymbol{A}}^{CS}$ 也是正交矩阵,每行每列的 2 范数均为 1,理想情况下,$\widetilde{\boldsymbol{A}}^{CS}$ 的每行元素均为 $\pm \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ 时,$\mu(\Phi, \Psi) = 1$,Ψ 和 Φ 有最大非相干性,即不能相互稀疏表示,这种情形下最有利于高效的压缩采样和信号重构。反之,当 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^{CS}$ 中的各个行向量中只有 1 个分量为 1,其余皆为 0 时,$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N}$,此时,每行元素高度凝聚,通过压缩观测精确重构原始信号的概率为 0。因此,$1 \leqslant \mu(\Phi, \Psi) \leqslant \sqrt{N}$。

定理 1 假设原始数据 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^N$ 在 Ψ 域上是 K-稀疏的,如果在 Φ 域随机地、均匀地选取 M 个向量作为观测矩阵 $\widetilde{\Phi}$,使得 $\boldsymbol{y} = \widetilde{\Phi}\Psi\Theta$,令信息算子为 $\boldsymbol{A}^{CS} = \widetilde{\Phi}\Psi$,若:

$$M \geqslant C\mu^2(\Phi, \Psi) K \log N \tag{2}$$

式中 C 为某个固定正常数,则压缩感知重构问题可以转化为如下约束最优化问题:

$$\min_{\Theta \in \mathbf{R}^N} |\boldsymbol{A}^{cs}\Theta|_1 \quad , \quad \text{s.t.} \ \boldsymbol{A}^{cs}\Theta = \boldsymbol{y} \tag{3}$$

且其解 Θ^* 很大概率上等于问题 $\boldsymbol{y} = \widetilde{\Phi}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} = \Psi\,\Theta$ 的精确解 Θ。

特别地,如果 $\mu(\Phi, \Psi) = 1$,则只需 $O(K\log N)$ 个观测就能以大概率精确重建原始信号。

因此,**定理** 1 只适用于 K-稀疏情形,但对可压缩情形,随机正交矩阵 Φ 和任意固定正交基 Ψ 组成的非相干正交基对(Φ, Ψ)依然适用。

定义 2(幂律衰减性) 如果将原始数据 $\boldsymbol{x}$ 各项按降序排列为 $|x|_{(1)} \geqslant |x|_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant |x|_{(N)}$,若第 i 最大项 $|x|_{(i)}$ 满足:

$$|x|_{(i)} \leqslant R i^{-\frac{1}{p}}, 1 \leqslant i \leqslant N \tag{4}$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 属于半径为 R 的弱 l_p 球。或称 $\boldsymbol{x}$ 满足一种幂律衰减性,参数 p 控制着衰减速度。

定理 2 假设原始数据 $\boldsymbol{x}$ 在 Ψ 域上满足式(4)且 $0 < p < 1$,或对 $p = 1$,$|x|_1 \leqslant R$。令 α 是充分小的正数,如果在 Φ 域随机地、均匀地选取 M 个向量作为观测矩阵 $\widetilde{\Phi}$,使得 $\boldsymbol{y} = \widetilde{\Phi}\Psi\Theta$,令信息算子为 $\boldsymbol{A}^{CS} = \widetilde{\Phi}\Psi$,若 $M \geqslant C\mu^2(\Phi, \Psi) K \log N$,则压缩感知重构问题可以转化为约束最优化问题:$\min\limits_{\Theta \in \mathbf{R}^N} |\boldsymbol{A}^{cs}\Theta|_1$, s.t. $\boldsymbol{A}^{cs}\Theta = \boldsymbol{y}$。

该问题的解存在且惟一,其解 Θ^* 很大概率上等于问题 $\boldsymbol{y} = \widetilde{\Phi}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} = \Psi\,\Theta$ 的精确解 Θ。同时重构误差概率不小于 $1 - O\left(N^{-\frac{p}{\alpha}}\right)$ 的满足:

$$\| \Theta - \Theta^* \|_2 \leqslant C_{p,\alpha} R \left(\frac{K}{\log N}\right)^{-r} \tag{5}$$

式中:$r = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$;$C_{p,\alpha}$ 为依赖于 p 和 α 的正常数。

因此,**定理** 2 适用于可压缩信号的非相干压缩感知[2,7],参看文献[7]中的 Theorem1.1 或文献[2]中的定理 7。

2 观测矩阵设计的基于非相干性准则的极大极小方法

Ψ 和 Φ 的相干性 $\mu(\Phi, \Psi)$ 越小,压缩采样所需的观测个数就会越少,意味着压缩观测 $\boldsymbol{y}$ 包含 $\boldsymbol{x}$ 的信息就会越多。利用观测矩阵与稀疏基的非相干准则及 Ψ 和 Φ 的相干性定义 $\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \max\limits_{1 \leqslant k,j \leqslant N} |\langle \Phi_k, \Psi_j \rangle|$,可构建求解 Φ 的极大极小问题。

对固定正交基 Ψ,寻找与其最不相干的正交基 Φ,可建立问题:

$$\min \max_{1\leqslant k,j\leqslant N} \sqrt{N}\,|\langle \Phi_k, \Psi_j\rangle| \tag{6}$$

式中:$\Phi_k=(\phi_{1k},\phi_{2k},\cdots,\phi_{Nk})^{\mathrm{T}}$,$k=1,2,\cdots,N$,$\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_N)$,满足 $\Phi\Phi^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$。问题(6)是一个极大极小问题。

定理 3　对固定的 $N\times N$ 正交基 Ψ(已知矩阵),寻找与其最不相干的正交基 Φ 的极大极小问题(6)与引入正实数 S,以 $S,\phi_{1k},\phi_{2k},\cdots,\phi_{Nk}$($k=1,2,\cdots,N$)为变量的下列问题等价:

$$\begin{cases} \min S \\ \text{s. t.}\quad \sqrt{N}\,|\langle \Phi_k,\Psi_j\rangle|\leqslant S,\ 1\leqslant k,j\leqslant N \\ \Phi\Phi^{\mathrm{T}}=I \\ S\geqslant 1 \end{cases} \tag{7}$$

证明　设 $\Phi_k^*=(\phi_{1k}^*,\phi_{2k}^*,\cdots,\phi_{Nk}^*)^{\mathrm{T}}$,$k=1,2,\cdots,N$,是问题(6)的解。令:

$$S^*=\max_{1\leqslant k,j\leqslant N}\sqrt{N}\,|\langle \Phi_k,\Psi_j\rangle| \tag{8}$$

则 $\sqrt{N}\,|\langle \Phi_k^*,\Psi_j\rangle|\leqslant S^*$,$1\leqslant k,j\leqslant N$,因此,$S^*$,$\Phi_k^*$,$k=1,2,\cdots,N$ 是问题(7)的可行解。假设它不是问题(7)的解,则存在 $\Phi_k^{**}=(\phi_{1k}^{**},\phi_{2k}^{**},\cdots,\phi_{Nk}^{**})^{\mathrm{T}}$,$k=1,2,\cdots,N$ 和 $S^{**}\geqslant 1$,使得 $S^{**}<S^*$,$\sqrt{N}\,|\langle \Phi_k^{**},\Psi_j\rangle|\leqslant S^{**}$,$1\leqslant k,j\leqslant N$。

显然,$\Phi_k^{**}=(\phi_{1k}^{**},\phi_{2k}^{**},\cdots,\phi_{Nk}^{**})^{\mathrm{T}}$,$k=1,2,\cdots,N$ 是问题(6)的可行解,且满足:$\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant N}\sqrt{N}\,|\langle \Phi_k^{**},\Psi_j\rangle|\leqslant S^{**}$。

由于 $S^{**}<S^*$,由式(8)可知,$\Phi_k^*=(\phi_{1k}^*,\phi_{2k}^*,\cdots,\phi_{Nk}^*)^{\mathrm{T}}$,$k=1,2,\cdots,N$ 不是问题(6)的最优解,矛盾。

同理,利用反证法容易证明问题(7)的解一定也是问题(6)的解。

由**定理** 3 可知,对固定的正交基 Ψ,通过求解问题(7)可得到与其最不相干的正交基 Φ 和最优相干性 S 的值。Φ 是确定性矩阵,在 Φ 域随机地、均匀地选取满足(2)的 M 个向量作为观测矩阵,以尽可能少的观测实现尽可能高的重构概率。该方法对 K－稀疏情形和可压缩情形均有效。

3　算例分析

设固定正交基 Ψ 为离散余弦基[8-9]:

$$\Psi=(\psi_{mn})_{N\times N}$$

式中:

$$\psi_{mn}=w(m)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)(m-1)}{2N}\right) \tag{9}$$

$$w(m)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{N}},\ m=1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}},\ 2\leqslant m\leqslant N\end{cases} \tag{10}$$

为计算简便起见,令 $N=9$,建立寻找与其最不相干的正交基 Φ 对应的极大极小问题(7)可得:

$$\begin{cases} \min S \\ \text{s. t.}\quad 3\,|\langle \Phi_k,\Psi_j\rangle|\leqslant S,\ 1\leqslant k,j\leqslant 9 \\ \Phi\Phi^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \\ S\geqslant 1 \end{cases} \tag{11}$$

该问题共有 $9\times9+1=82$ 个未知变量,208 个约束条件,利用 Matlab 软件或 Lingo 软件求解问题(11)得到 $S^*=1.1940$(Ψ 与 Φ 的最优非相干性)以及与 Ψ 最不相干的正交基 Φ 为:

$$\begin{pmatrix} 0.4635 & 0.0448 & 0.1181 & 0.1618 & -0.1043 & -0.7667 & 0.1808 & -0.0554 & 0.3294 \\ 0.1727 & -0.3401 & -0.0717 & -0.2730 & 0.0935 & 0.0243 & -0.2928 & -0.8214 & 0.0716 \\ -0.3538 & 0.0020 & -0.3177 & 0.6618 & 0.2480 & 0.0556 & -0.0419 & -0.1802 & 0.4870 \\ -0.0672 & -0.0178 & 0.4397 & -0.1184 & 0.0687 & 0.3137 & 0.7345 & -0.2236 & 0.3086 \\ 0.2212 & -0.0114 & 0.4643 & 0.6393 & -0.2892 & 0.2051 & -0.1250 & -0.2165 & -0.3721 \\ 0.6639 & -0.3527 & -0.4067 & 0.1286 & 0.0924 & 0.3851 & 0.1914 & 0.2370 & 0.0570 \\ 0.1447 & -0.1243 & 0.5409 & -0.0422 & 0.5267 & 0.0890 & -0.4470 & 0.2975 & 0.3092 \\ -0.3157 & -0.8005 & 0.0845 & 0.1074 & 0.1243 & -0.3028 & 0.1943 & 0.1335 & -0.2796 \\ 0.1240 & 0.3187 & -0.0769 & 0.0939 & 0.7274 & -0.1416 & 0.2248 & -0.1743 & -0.4884 \end{pmatrix}$$

从中可以看出,$\mu(\Phi,\Psi)$非常接近1,且Φ是确定性的矩阵。对$N=16, 25, 36$等情形,得到的最优相干性$\mu(\Phi,\Psi)$介与1.2-1.3。

为比较本文方法与常规随机获取观测矩阵的方法,在单位球上随机均匀独立地选取N个正交单位向量构成Φ_1,所有元素独立同分布的选取服从$N\left(0,\frac{1}{N}\right)$的Gaussian分布[10]构成$\Phi_2$,通过计算机仿真,分别计算与离散余弦基$\Psi$的相干性,其结果见表1(其中$\Phi$为本文方法得到的观测矩阵)。

表1 各类观测矩阵与离散余弦基的相干性

Tab. 1 Tthe coherence between various measurement matrixes and discrete cosine basis

相干性	$N=9$	$N=16$	$N=25$	$N=36$
$\mu(\Phi,\Psi)$	1.1940	1.2013	1.2311	1.2732
$\mu(\Phi_1,\Psi)$	1.3800	1.5719	1.6466	1.8900
$\mu(\Phi_2,\Psi)$	1.4020	1.9478	2.2000	2.9253

由表1不难看出,本文极大极小方法得到的观测矩阵对应的相干性更小,特别是随着N的增大,这种优势更加明显。

4 结束语

本文提出了观测矩阵设计的基于非相干性准则的极大极小方法,从理论上研究了方法的可行性,通过固定正交基Ψ为离散余弦基(低维情形)的实例验证了方法的有效性。然而,必须强调的是,本文仅仅提出了一种可行的方法,但离实际应用还有差距,因为当原始数据的维数较大时,问题(7)是一个大型问题,例如:$N=1\,000$时,未知变量共10^6个,约束条件共有2 500 501个;当$N=10\,000$时,未知变量和约束条件更多,因此必须构造相应的启发式算法才可实现其求解。但由于约束条件$\Phi\Phi^T=\boldsymbol{I}$是非线性的,构造其启发式算法并非易事。到目前为止,本文作者还未解决这一难题,这也是将来需要进一步研究的问题。

参考文献:

[1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE trans information theory,2006, 52(4): 1289-1306.

[2] 邵文泽,韦志辉,肖亮,等. 压缩感知基本理论:回顾与展望[EB/OL].(2010-12-25)[2011-3-24]. http://www.paper.edu.cn.
SHAO Wenze, WEI Zhihui, XIAO Liang, et al. Advances and perspectives on compressed sensing theory[EB/OL].(2010-12-23)[2011-03-24]. http://www.paper.edu.cn. (in Chinese)

[3] 金坚,谷源涛,梅顺良. 压缩采样技术及其应用[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(2): 470-475.
JIN Jian, GU Yuantao, MEI Shunliang. An introduction to compressive sampling and its applications[J]. Journal of electronics & information technology, 2010, 32(2): 470-475. (in Chinese)

[4] Blanchard J D, Cartis C, Tanner J. Decay properties of restricted isometry constants[J]. IEEE signal processing letters, 2009, 16(7): 572-575.

[5] Donoho D L, Tsaig Y. Extensions of compressed sensing [J]. Signal processing. 2006, 86(3): 533-548.

[6] Cand E, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J]. Inverse problems, 2007, 23(3): 969-985.

(下转第94页)