

一种改进的相对轨道动力学模型

吕纪远, 周 军, 刘莹莹

(西北工业大学精确制导与控制研究所, 陕西 西安 710072)

摘要 线性化的 Clohessey - Whiltshire(C - W) 方程描述相对运动虽然方便, 但是精度不高, 为了解决这一问题, 提出了一种 C - W 方程的改进形式。首先基于 C - W 方程的推导, 分析了在对中心引力取近似的过程中导致原方程不准确的数学原因和物理现象; 然后通过对简化部分的数量级进行分析和比较, 将原推导过程中忽略掉的部分重要内容重新予以考虑, 并运用数学变换将新加入的内容合并转化, 最终给出了一组非齐次线性常系数微分方程, 在不增加计算复杂度的情况下提高了精度。仿真验证表明该方程在圆轨道下相对于 C - W 方程精度改善很多, 小椭圆轨道下也消除了 C - W 方程的长期误差。

关键词 C - W 方程; 线性化误差; 相对运动; 误差分析

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2011.05.003

中图分类号 V423.4 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2011)05-0010-05

描述 2 颗卫星近距离相对运动的 C - W 方程(Clohessey - Whiltshire, 又称 Hill 方程)在空间交会对接和编队控制方面有着重要的应用。虽然线性化的 C - W 方程为人们解决多脉冲交会控制和伴飞的封闭性条件等问题提供了巨大的便利^[1-4], 但是, 这组通过简化 2 个二体运动得到的线性微分方程组, 其与生俱来的误差也在一定程度上限制了在实际空间任务中的应用^[5-6]。

文献[7]指出, C - W 方程适用于近距离近圆轨道。由非线性方程简化得到的 C - W 方程虽然误差较小, 但依然会给精确的相对轨道分析带来不容忽视的误差。因此, 从 C - W 方程推导出至今, 就不断有学者希望将其应用范围推广或将精度提高。目前比较著名的是 Lawden 方程^[8-10], 它在椭圆轨道下, 利用微分变量代换的方法推导出了基于真近点角域的相对运动关系, 并得出了椭圆参考轨道下周周期性相对运动的解析描述, 只是形式比 C - W 方程繁琐许多。另外, 还有学者在推导 C - W 方程的过程中将中心引力不取近似, 从而得到了一组非线性微分方程, 这组方程可以十分准确地描述近圆轨道下的相对运动^[11], 但是却失去了 C - W 方程的线性性质, 使用起来很不方便。

基于此, 本文通过一系列推导, 提出一种 C - W 方程的改进形式, 有效地改善了 C - W 方程的精度问题, 推导出的结果仍为常系数线性微分方程组, 形式简单, 并且通过仿真分析了精度的改善效果。

1 C - W 方程误差及误差源分析

本文主要用到的是相对运动坐标系 $oxyz$, 原点 o 在参考星的质心, oz 指向地心, oy 与参考星轨道平面垂直, 指向轨道面法线反向, ox 按右手法则指向飞行前进方向。该坐标系实际上为参考星的轨道坐标系。在该坐标系下描述 2 颗卫星相对运动的方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{z} = 0 \\ \ddot{y} + n^2 y = 0 \\ \ddot{z} + 2n\dot{x} - 3n^2 z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2011 - 06 - 23

基金项目: 国家部委基金资助项目(CSAC200902)

作者简介: 吕纪远(1984 -), 男, 河南洛阳人, 博士生, 主要从事卫星姿态轨道动力学与控制研究。

E-mail: lvjiyuan@139.com

式(1)即为标准 C - W 方程,下面通过简单的仿真说明 C - W 方程存在的误差问题。

给定 2 颗卫星的轨道 6 要素见表 1,这 2 颗卫星均在圆轨道下运行,以串行编队前后飞行。不妨以卫星 1 为参考星,则相对运动的初始条件为 $\rho_0 = [10 \ 0 \ 0.007 \ 2] \text{ km}$, $\dot{\rho}_0 = [0 \ 0 \ 0] \text{ km/s}$ 。仿真时给定一个准确的参考模型,即将 2 颗卫星二体运动进行数值积分,将两颗卫星状态相减后,再从地心惯性坐标系转换到相对运动坐标系,得到相对运动状态。仿真 3 个轨道周期,观察 C - W 方程模型与参考模型的差别,见图 1。

表 1 2 颗卫星的轨道 6 要素

| Tab. 1 Classical orbit elements of two satellites | | |
|---|-------|-------|
| 轨道 6 要素 | 卫星 1 | 卫星 2 |
| 轨道长半轴 a/km | 6 971 | 6 971 |
| 轨道倾角 $i/(\circ)$ | 97.73 | 97.73 |
| 轨道偏心率 e | 0 | 0 |
| 升交点赤径 $\Omega/(\circ)$ | 90 | 90 |
| 近地点角距 $\omega/(\circ)$ | 60 | 60 |
| 平近点角 $M/^\circ$ | 57.30 | 57.38 |

从图 1 中可以看出,即使在不考虑摄动的正圆轨道下,C - W 方程也不可避免地存在一定的误差,主要存在于 x 方向上,当 2 颗卫星前后相距约 10 km 时,3 个轨道周期后在 x 方向上有 816 m 的偏差。

可以通过分析 C - W 方程的推导过程对误差来源进行研究。记参考星为 s ,伴随星为 c 。 r_s 和 r_c 分别表示两颗卫星的地心位置矢量,在相对运动坐标系 $oxyz$ 下,有:

$$r_s = [r_s \ 0 \ 0]^T; \quad \rho = r_c - r_s = [x \ y \ z]^T \quad (2)$$

仅受地球引力作用,2 颗卫星的轨道加速度之差为:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{\mu}{r_s^3} r_s - \frac{\mu}{r_c^3} r_c \quad (3)$$

由于 $r_c = x^2 + y^2 + (z - r_s)^2$,将上式右端展开:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} &= \mu r_s^{-3} r_s - \mu [x^2 + y^2 + (z - r_s)^2]^{-\frac{3}{2}} r_c = \mu r_s^{-3} r_s - \mu (r_s^2 - 2r_s z + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} (\rho + r_s) = \\ &\mu r_s^{-3} \left[r_s - \left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2} \right)^{-\frac{3}{2}} (\rho + r_s) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

推导主要针对 $\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$ 这一项进行简化,根据近似表达式: $(1 + \alpha)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} \alpha + \frac{15}{8} \alpha^2 + \dots$

有:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2} \right)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} \left(-\frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2} \right) + \frac{15}{8} \left(-\frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2} \right)^2 + \dots \quad (5)$$

当 2 个航天器相对距离较小时,也就是说 $\rho \ll r_s$,在 C - W 方程的推导过程中,会略去式(5)第 2 项中的平方项和第 3 项以后项,简化方程为:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2} \frac{2z}{r_s} = 1 + \frac{3z}{r_s} \quad (6)$$

正是此处的简化导致了精度问题,化简后的结果代入式(4),会发现不能足够准确地还原原式所蕴含的物理意义:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \mu r_s^{-3} \left[r_s - \left(1 + \frac{3z}{r_s} \right) (\rho + r_s) \right] \quad (7)$$

分析如下:在不考虑摄动影响的正圆轨道下,如果 2 颗卫星轨道长半轴相等,那么这 2 颗卫星所受到的引力加速度之差应该始终保持不变,但是在采用了简化结论式(6)后,就会导致引力加速度之差与 z 密切相关,见图 1,式(1)的动力学会造成 z 的变化,结果根据式(7)就会对轨道加速度之差产生不符合物理事实的影响,进而影响到整个系统的精度。

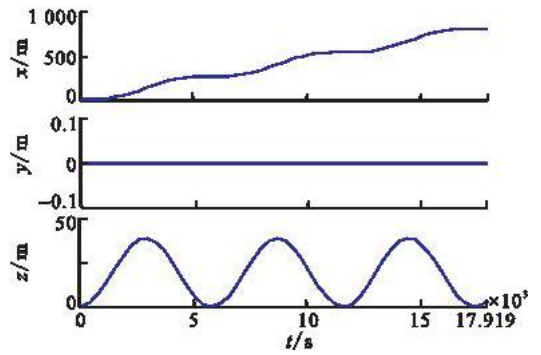


图 1 正圆轨道下 C - W 方程的误差

Fig.1 The error of C - W equation in circle orbit

2 C-W 方程推导的修正

针对 C-W 方程简化 $\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 导致了误差问题,进行 C-W 方程的修正。将该项展开为:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3z}{r_s} - \frac{3\rho^2}{2r_s^2} + \frac{15}{8}\left(-\frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^2 + \dots \quad (8)$$

通过估算可以发现,等式右端第 2 项的数量级为 10^{-4} ,第 3 项为 10^{-6} ,第 4 项的数量级为 10^{-8} ,因此,我们考虑忽略掉第 4 项及其以后项,针对前 3 项进行分析:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3z}{r_s} - \frac{3\rho^2}{2r_s^2} = 1 + 3\frac{z}{r_s} - 3\frac{1\rho^2}{r_s 2r_s} = 1 + 3\frac{1}{r_s}\left(z - \frac{\rho^2}{2r_s}\right) \quad (9)$$

此处的 $\frac{\rho^2}{2r_s}$ 并不具有十分明显的物理意义,可以将其等价变换为 $\frac{\rho^2 r_s}{r_s^2 2}$,则有:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 + 3\frac{1}{r_s}\left(z - \frac{\rho^2 r_s}{r_s^2 2}\right) \quad (10)$$

由于 $\rho \ll r_s \approx r_c$,因此可以认为:

$$\theta \approx \frac{\rho}{r_s} \quad (11)$$

式中 θ 即为 2 颗卫星在地心赤道坐标系下位置矢量的夹角,见图 2。

通过代入式(11),式(10)化简如下:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + 3\frac{1}{r_s}\left(z - \theta^2 \frac{r_s}{2}\right) \quad (12)$$

而 $\theta^2 \frac{r_s}{2} = r_s \left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]$,因此原式可进一步变

换为:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + 3\frac{1}{r_s}\left[z - r_s \left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]\right] \quad (13)$$

由于 $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \dots$,替换可得:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + 3\frac{1}{r_s}[z - r_s(1 - \cos\theta)] \triangleq 1 + 3\frac{1}{r_s}z' \quad (14)$$

式(14)中定义 $z' = z - r_s(1 - \cos\theta)$,下面再针对此项进行分析。图 2 中,2 颗卫星轨道高度略有不同,不失一般性,设卫星 1 为参考星且按正圆轨道运行, a_1 和 a_2 分别为卫星 1 和卫星 2 的轨道长半轴。则 z 即伴随星在参考星 $oxyz$ 坐标系下的相对高度。由于:

$$r_s = a_1 \approx a_2 \quad (15)$$

则有:

$$z' = z - a_1(1 - \cos\theta) \approx z - a_2(1 - \cos\theta) \quad (16)$$

令 $\Delta a = a_2 - a_1$,则根据式(16)和图 2 中三角形关系容易得出: $z' = \Delta a$ 。因此得:

$$\left(1 - \frac{2z}{r_s} + \frac{\rho^2}{r_s^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + 3\frac{1}{r_s}\Delta a \quad (17)$$

式(17)是改进后的简化结果,与 C-W 方程的简化结果式(6)相比,是将相对坐标系下的轨道高度差 z 变成了惯性坐标系下的轨道高度差 Δa 。接下来的推导将与 C-W 方程基本一致,将式(17)代入式(4),在参考星偏心率 $e = 0$ 的情况下,有:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \mu r_s^{-3} \left[r_s - \left(1 + 3\frac{1}{r_s}\Delta a\right)(\rho + r_s) \right] = \begin{bmatrix} -n^2 x \\ -n^2 y \\ n^2(3\Delta a - z) \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中 $n = \sqrt{\mu/a^3}$ 为参考航天器的平均轨道角速度。此外,在动坐标系 $oxyz$ 下,伴随星与参考星的相对运动还

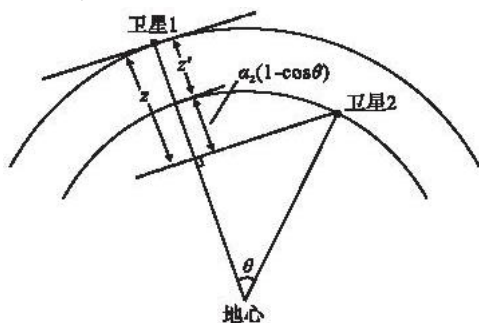


图 2 两颗卫星位置示意图

Fig. 2 Positions of the two satellites

满足如下关系:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} + 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho} \quad (19)$$

式中 $\frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2}$ 和 \mathbf{v} 分别表示伴随星在动坐标系下的相对加速度矢量和速度矢量, $\mathbf{n} = [0 \quad -n \quad 0]^T$ 。在参考星 $e = 0$ 的情况下,式(19)可化简至:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{z} - n^2 x \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} + 2n\dot{x} - n^2 z \end{bmatrix} \quad (20)$$

结合式(18),可得:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{z} - n^2 x \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} + 2n\dot{x} - n^2 z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n^2 x \\ -n^2 y \\ n^2(3\Delta a - z) \end{bmatrix} \quad (21)$$

即:

$$\ddot{x} - 2n\dot{z} = 0; \ddot{y} + n^2 y = 0; \ddot{z} + 2n\dot{x} - 3n^2 \Delta a = 0 \quad (22)$$

至此,改进的相对运动方程推导完毕。与原始的 C-W 方程式(1)相比,区别仅在于 z 通道上,原来的一次项 $-3n^2 z$ 被常数项 $-3n^2 \Delta a$ 替代,在推导过程中,本文的推导比 C-W 方程的推导多考虑了一项,因此,精度上必将会有所提高,而且由于推导过程中采用多种几何和代数变换,推导出的结果并不比原 C-W 方程复杂,保持了常系数微分方程的原貌。这里的 Δa 可以通过相对轨道测量或者地面测量给出,由于本文的仿真主要针对动力学模型进行验证,因此暂不考虑 Δa 的测量误差。

3 仿真实验

为进行比较,下面针对动力学模型式(22),仍然采用表1中的轨道参数进行仿真,3个轨道周期该模型的误差见图3。与图1相比,在 Δa 测量准确的情况下,误差从 816 m 降低到了 10^{-6} m 以内,说明在圆轨道下,改进后的动力学方程大大改善了精度。为了验证略有偏心率的近圆轨道下的效果,对表1的数据进行修改,2颗卫星的偏心率均设置为 0.002,轨道长半轴分别设置为 6 971 km 和 6 971.05 km,略有不同以显示普遍性。仍以卫星 1 为参考星,相对运动初始条件基本不变,仿真 3 个轨道周期,观察 2 种动力学模型与无摄动数值积分模型的差别,见图 4,图中实线为改进 C-W 方程的误差,虚线为原 C-W 方程的误差。

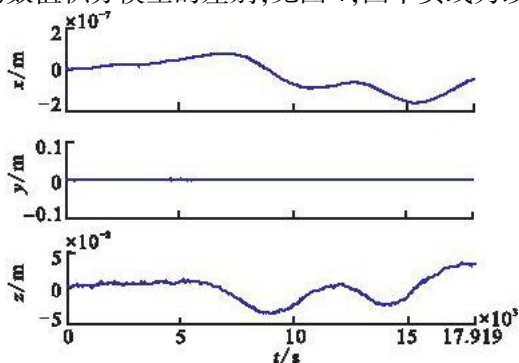


图3 修正后方程的误差

Fig.3 The error of modified equation

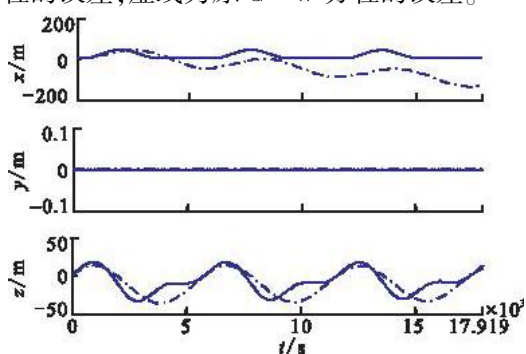


图4 修正后方程的误差和 C-W 方程的误差

Fig.4 The error of modified equation and C-W equation

在轨道周期内,改进后的模型误差小于 C-W 方程。观察仿真结束时刻曲线的位置,C-W 方程模型在每个轨道周期完成时存在一定的漂移(43.3 m),即存在长期误差项,而修正后的动力学模型则不存在这种现象,说明在微小偏心率的近圆轨道下,也具有比原 C-W 方程更好的效果。

4 结束语

本文主要研究了 C-W 方程的误差问题,首先经过推导和仿真分析了导致 C-W 方程不准确的误差源,然后通过对简化过程中各项数量级的分析,将原推导过程忽略掉的但影响较为严重一项加入重新推导,并经

过数学变换,将此项内容进行转化,最终结果简单明了。仿真验证该结果在圆轨道下相对于 C - W 方程精度改善很多,近圆轨道下也消除了 C - W 方程的长期误差项。此方程对于研究相对运动问题具有一定的意义,可以作为工程实际的参考。

参考文献:

- [1] 林来兴. 近距离空间交会动力学[J]. 中国空间科学技术,1998,2(4):40-47.
LIN Laixing. The dynamic of space rendezvous within a short distance[J]. Chinese space science and technology,1998,2(4):40-47. (in Chinese)
- [2] 李晨光,肖业伦. 多脉冲 C - W 交会的优化方法[J]. 宇航学报,2006,27(2):172-176.
LI Chenguang, XIAO Yelun. Optimization methods of multi-pulse C - W rendezvous[J]. Journal of astronautics,2006,27(2):172-176. (in Chinese)
- [3] Hablani H B, Tapper M L, Dana - Bashian D J. Guidance and relative navigation for autonomous rendezvous in a circular orbit [J]. Journal of guidance, control and dynamics, 2002, 25(3):553-562.
- [4] Kapila V, Sparks A G, Buffington J M, et al. Spacecraft formation flying: dynamics and control[J]. Journal of guidance, control and dynamics,2000,23(3):561-564.
- [5] 何焱,谈细春. 空间交会对接中 Hill 方程的计算误差特性研究[J]. 中国空间科学技术,1998,2(6):7-14.
HE Yan, TAN Xichun. Research of calculation error property of hill equation in space rendezvous and docking[J]. Chinese space science and technology,1998,2(6):7-14. (in Chinese)
- [6] 高云峰,宝音贺西,李俊峰. 卫星编队飞行中 C - W 方程与轨道根数法的比较[J]. 应用数学和力学,2003,24(8):799-804.
GAO Yunfeng, BAUYIN Hexi, LI Junfeng. Comparison of two methods in satellite formation flying[J]. Applied mathematics and mechanics,2003,24(8):799-804. (in Chinese)
- [7] Umair Ahsun. Dynamics and control of electromagnetic satellite formations in low earth orbits[R]. AIAA 2006-6590.
- [8] Melton R. Time-explicit representation of relative motion between elliptical orbits[J]. Journal of guidance, control, and dynamics,2000,23(4):604-610.
- [9] Pradipto Ghosh, Albert Bosse. A study of linear and nonlinear satellite formation flying control methodologies from a fuel consumption perspective[R]. AIAA 2007-6083.
- [10] Inalhan G, Tillerson M, How J P. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits[J]. AIAA journal of guidance, control and dynamics, 2002, 25(1):43-53.
- [11] Baoyin H, Li Junfeng, Gao Yunfeng. Dynamical behaviors and relative trajectories of the spacecraft formation flying[J]. Aerospace science and technology, 2002(6):295-301.

(编辑:徐敏)

An Improved Form of Relative Trajectories Dynamics Model

LÜ Ji-yuan, ZHOU Jun, LIU Ying-ying

(Institute of Precision Guidance and Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

ABSTRACT: The linearized C - W equation is used very expediently, but it has the problem of inaccuracy. An improved equation based on C - W equation was presented, which can describe the formation flying more accurate. Firstly, the derivative process of C - W equation was analyzed and the inaccurate reason was find out. Then parts of contents were adding and re-derivation, which has been ignored in order to simplify the equation in the original derivative process. And lots of mathematical transformations were used to reduce the new equation. Finally, a set of linear differential equations with constant coefficients was given, which can improving the precision without increasing the complexity. Simulation shows that in the condition of circular orbit, the accuracy was improved a lot comparing with the C - W equation, while in nearly circular orbit, the long-term error of C - W equation was eliminated.

Keywords: C - W equation; linearized error; relative motion; error analysis