第12卷第4期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 12 No. 4
2011年8月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Aug. 2011

一类带有周期参数的 SIS 传染病模型*

杨友社

(空军工程大学理学院,陕西 西安 710051)

摘要　通过对经典的 SIS 传染病模引入周期性变化的疾病传播参数,建立了一类具有周期性变化参数的 SIS 传染病模型。借助微分方程比较定理和稳定性理论,对其进行定性分析,得到了决定疾病灭绝与否以及模型动力学形态的阈值。在该阈值之下,模型的无病周期解是全局渐近稳定的,这意味着疾病最终灭绝;在该阈值之上,模型的无病周期解是不稳定的,同时模型还存在全局渐近稳定的地方病周期解,这意味着疾病将持续存在于种群之中,并且染病者的数量呈周期性变化。

关键词　传染病模型;周期解;全局渐近稳定性;阈值

DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2011.04.018

中图分类号　O175.12　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2011)04-0082-05

在现实生活中,传染病广泛存在。利用数学模型分析和研究传染病的动力行为已是数学理论应用的一个重要领域。在对传染病的传播过程建立数学模型时,经常将各参数假定为常数,这样所得模型就为自治微分系统[1-3]。但在实际中,某些参数是随时间的改变而发生变化,比如,某些种群的出生率、死亡率与季节有关,有些传染病的发病也与季节有关(如流行感冒)等。对此情形所建立的数学模型即为非自治微分系统[4-10]。由于春夏秋冬在自然界中周而复始的交替,因此,将具有周期性的参数引入模型之中具有一定的实际意义。在本文所考虑的传染病模型中,有一些参数正是呈周期性变化的。

我们知道,各参数为常数、传染病为双线性型的一类 SIS 传染病模型:$\begin{cases} S'=\mu(b-S)-\beta SI+\gamma I \\ I'=\beta SI-(\mu+\gamma)I \end{cases}$存在阈值 $R_0=\dfrac{\beta b}{\mu+\gamma}$, 当 $R_0\leqslant 1$ 时,该模型仅有无病平衡点,且其是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,该模型除无病平衡点外,还存在唯一的地方病平衡点,这时,无病平衡点是不稳定的,地方病平衡点是全局渐近稳定的。

在本文,对上述模型引入周期参数,通过分析也找到了无病周期解和地方病周期解全局渐近稳定的阈值。

1　模型

本文所考虑的 SIS 传染病模型为:

$$\begin{cases} S'(t)=\mu(t)[b(t)-S(t)]-\beta(t)S(t)I(t)+\gamma I(t) \\ I'(t)=\beta(t)S(t)I(t)-[\mu(t)+\gamma]I(t) \\ S(0)=S_0\geqslant 0, I(0)=I_0\geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

式中:$S(t)$ 和 $I(t)$ 分别为 t 时刻易感者和染病者的数量;$\mu(t)$ 和 $\beta(t)$ 分别为种群的自然死亡率和疾病的传播系数;$\mu(t)b(t)$ 为对种群的输入率;$\gamma>0$ 为染病者的恢复率(治愈率),这里假设它与时间无关。假定 $\mu(t)$、

* 收稿日期:2011-03-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071256)
作者简介:杨友社(1962-),男,陕西大荔人,副教授,主要从事微分方程定性分析研究.
E-mail: yyssohu690@sohu.com

$b(t)$和$\beta(t)$都是周期为$T(T>0)$的正连续可微函数。记:

$$0<\mu_1=\min_{t\in[0,T]}\mu(t)<\max_{t\in[0,T]}\mu(t)=\mu_2;$$

$$0<b_1=\min_{t\in[0,T]}b(t)<\max_{t\in[0,T]}b(t)=b_2;$$

$$0<\beta_1=\min_{t\in[0,T]}\beta(t)<\max_{t\in[0,T]}\beta(t)=\beta_2。$$

由式(1)的第2个方程有:$I(t)=I_0e^{\int_0^t[\beta(u)S(u)-\mu(t)-\gamma]du}$,于是,当$I_0=0$时$I(t)\equiv 0$,对于$t>0$;当$I_0>0$时$I(t)>0$,对于$t>0$。又$S'\Big|_{S=0}=\mu(t)b(t)+\gamma I(t)>0$,所以,集$D=\{(S,I):S>0,I\geqslant 0\}$是系统(1)的一个正不变集。

2 结果

引理1 方程:

$$S'(t)=\mu(t)[b(t)-S(t)],\quad S(0)=S_0\geqslant 0 \tag{2}$$

存在唯一全局渐近稳定的周期解$S^*(t)$,且$b_1\leqslant S^*(t)\leqslant b_2$。证明如下:

1)存在唯一性。

对方程(2)直接求解可得:$S(t)=S_0e^{-\int_0^t\mu(u)du}+e^{-\int_0^t\mu(u)du}\int_0^t e^{\int_0^u\mu(v)dv}\mu(u)b(u)du$。因为$\mu(t)>0$,所以$\int_0^t\mu(u)du>0$,进而可得方程(2)存在唯一的正周期解$S^*(t)$,其对应的初值为:

$$S_0=\frac{\int_0^T e^{\int_0^{u-T}\mu(v)dv}\mu(u)b(u)du}{1-e^{-\int_0^T\mu(u)du}}。$$

2)全局渐近稳定性。

令$U(t)=S(t)-S^*(t)$,则方程(2)变为$U'(t)=-\mu(t)U(t)$。由于$\int_0^t\mu(u)du\geqslant\mu_1 t$,所以$S^*(t)$是全局渐近稳定的。

3)由于$0<b_1\leqslant b(t)\leqslant b_2$,所以方程(2)的解$S(t)$满足:

$$\mu(t)[b_1-S(t)]\leqslant S'(t)\leqslant\mu(t)[b_2-S(t)]$$

又方程$S'(t)=\mu(t)[b_1-S(t)]$和$S'(t)=\mu(t)[b_2-S(t)]$的解分别收敛于$S(t)=b_1$和$S(t)=b_2$,因此,由比较定理有:

$$b_1\leqslant\liminf_{t\to\infty}S(t)\leqslant\limsup_{t\to\infty}S(t)\leqslant b_2$$

于是有:

$$b_1\leqslant S^*(t)\leqslant b_2$$

引理1证毕。

对于总种群$N(t)=S(t)+I(t)$,由式(1)有:

$$N'(t)=\mu(t)[b(t)-N(t)] \tag{3}$$

引理2 方程(3)存在唯一全局渐近稳定的周期解$S^*(t)$,且$b_1\leqslant S^*(t)\leqslant b_2$。为了下面表述方便,记:

$$<f>=\int_0^T f(u)du;$$

$$R_0=<\beta(t)S^*(t)-(\mu(t)+\gamma)>$$

由**引理1**知$(S^*(t),0)$是系统(1)的一个周期解(被称为无病周期解)。关于它的稳定性有定理:

定理1 对于系统(1),解$(S^*(t),0)$当$R_0<0$时是渐近稳定的,当$R_0>0$时是不稳定的。进一步,当$R_0<0$时,解$(S^*(t),0)$是全局渐近稳定的。

证明 系统(1)关于解$(S^*(t),0)$的变分方程为:

$$\boldsymbol{Y}'=\begin{pmatrix}-\mu(t) & -\beta(t)S^*(t)+\gamma\\ 0 & \beta(t)S^*(t)-(\mu(t)+\gamma)\end{pmatrix}\boldsymbol{Y} \tag{4}$$

于是,方程(4) 的特征乘子为:

$$\lambda_1 = e^{-\int_0^T \mu(u)\mathrm{d}u} < 1;$$

$$\lambda_2 = e^{\int_0^T [\beta(u)S^*(u) - (\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u}。$$

当 $R_0 < 0$ 时,$\lambda_2 < 1$;当 $R_0 > 0$ 时,$\lambda_2 > 1$。所以解$(S^*(t),0)$ 当 $R_0 < 0$ 时是稳定的,当 $R_0 > 0$ 时是不稳定的。

注意到 $I'(t) = I(t)[\beta(t)(N(t) - I(t)) - (\mu(t) + \gamma)] \leqslant I(t)[\beta(t)N(t) - (\mu(t) + \gamma)]$。

当 $R_0 < 0$ 时,存在正数 ε,使得 $<\beta(t)(S^*(t) + \varepsilon) - (\mu(t) + \gamma)> < 0$。依**引理** 2,存在 $T > 0$,使得当 $t > T$ 时有 $N(t) < S^*(t) + \varepsilon$。因此,当 $t > T$ 时,$I'(t) \leqslant I(t)[\beta(t)(S^*(t) + \varepsilon) - (\mu(t) + \gamma)]$。

由于 $<\beta(t)(S^*(t) + \varepsilon) - (\mu(t) + \gamma)> < 0$,所以$\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$。由**引理** 2 便有$\lim\limits_{t\to\infty}[S(t) - S^*(t)] = 0$。因此,当 $R_0 < 0$ 时解$(S^*(t),0)$ 是全局渐近稳定的。

关于系统(1) 的正周期解(被称为无病周期解) 的存在性和稳定性有下面的定理。

定理 2 当 $R_0 > 0$ 时,系统(1) 存在唯一的正周期解,并且该周期解是全局渐近稳定的。

为了证明**定理** 2,首先考虑方程:

$$I'(t) = I(t)[\beta(t)(S^*(t) - I(t)) - (\mu(t) + \gamma)] \tag{5}$$

由于 $S^*(t) \leqslant b_2$,所以当 $I(t) > 0$ 时有:

$$I'(t) < \beta(t)I(t)(b_2 - I(t))。$$

于是,当 t 充分大时有 $I(t) \leqslant b_2$,因此,区间$[0,b_2]$ 是方程(5) 的正不变集。

同时注意到,当 $R_0 > 0$ 时,能取到正整数 $\delta < b_1$ 满足:

$$(\beta(t)(S^*(t) - \delta) - (\mu(t) + \gamma)) > 0。$$

下面引理给出方程(5) 解的下界。

引理 3 设 $R_0 > 0$,如果 $I(t)$ 是方程(5) 满足初始条件 $I_0 \geqslant \delta$ 的解,则对任意的 $t \geqslant 0$ 都有 $I(t) \geqslant \delta e^{-(\mu_1+\gamma)T}$。

证明 假设存在 $t^* > 0$,使得 $I(t^*) < \delta e^{-(\mu_1+\gamma)T}$。令 $t_0 = \sup\{t:I(t) = \delta, 0 \leqslant t \leqslant t^*\}$;则 $I(t_0) = \delta$,且对任意的 $t \in \{t_0,t^*\}$ 都有 $I(t) < \delta$。

对于 t^* 和 t_0 可断言 $t^* - t_0 < T$。事实上,如果 $t^* - t_0 \geqslant T$,则对任意的 $t \in \{t_0,t_0 + T\} \subset \{t_0,t^*\}$。$I(t) < \delta$。因此:

$$\delta > I(t_0 + T) = I(t_0)e^{\int_{t_0}^{t_0+T}[\beta(u)(S^*(u)-I(u))-(\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u} \geqslant I(t_0)e^{\int_{t_0}^{t_0+T}[\beta(u)(S^*(u)-\delta)-(\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u} =$$

$$I(t_0)e^{\int_0^T[\beta(u)(S^*(u)-\delta)-(\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u} \geqslant I(t_0) = \delta。$$

矛盾,因此,$t^* - t_0 < T$。

同时,$\delta e^{-(\mu_1+\gamma)T} > I(t^*) = I(t_0)e^{\int_{t_0}^{t^*}[\beta(u)(S^*(u)-I(u))-(\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u} \geqslant I(t_0)e^{\int_{t_0}^{t^*}[\beta(u)(S^*(u)-\delta)-(\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u} \geqslant I(t_0)e^{\int_{t_0}^{t^*}[-(\mu_1+\gamma)]\mathrm{d}u} = \delta e^{[-(\mu_1+\gamma)(t^*-t_0)]} = \delta e^{-(\mu_1+\gamma)T}$。

其中用到 $S^*(t) \geqslant b_1 > \delta$,这又是一个矛盾,因此**引理** 3 成立。

从**引理** 3 知,方程(5) 的解 $I(t,I_0)$ 具有性质:

$$I(t,[\delta,b_2]) \subset [\delta e^{-(\mu_1+\gamma)T},b_2],t \geqslant 0。$$

引理 4 当 $R_0 > 0$ 时,方程(5) 存在唯一的正周期解 $I^*(t)$。进一步,正周期解 $I^*(t)$ 是全局渐近稳定的。

证明 直接计算可得,方程(5) 在初始条件 $I(0) = I_0 > 0$ 下的解为:

$$I(t) = \frac{e^{\int_0^t[\beta(u)S^*(u)-(\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u}}{I_0 + \int_0^t \beta(u)e^{\int_0^u[\beta(v)S^*(v)-(\mu(v)+\gamma)]\mathrm{d}v}\mathrm{d}u}$$

由于 $R_0 > 0$,所以初值 $I(t) = \dfrac{\int_0^T \beta(u)e^{\int_T^u[\beta(v)S^*(v)-(\mu(v)+\gamma)]\mathrm{d}v}\mathrm{d}u}{1 - e^{\int_0^T[\beta(u)S^*(u)-(\mu(u)+\gamma)]\mathrm{d}u}}$ 对应的解 $I^*(t)$ 是方程(5) 的唯一正周期解。

为了证明 $I^*(t)$ 的全局渐近稳定性,对方程(5)作变量代换:

$$I(t)=\mathrm{e}^{Y(t)},$$

则方程(5)变为:

$$Y'(t)=-\beta(t)\mathrm{e}^{Y(t)}+[\beta(t)S^*(t)-(\mu(t)+\gamma)] \tag{6}$$

定义 Liapumov 函数: $V(t)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{Y}^*(t)]^2$,其中 $\boldsymbol{Y}^*(t)=\ln I^*(t)$,则有:

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(6)}=-\beta(t)[\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{Y}^*(t)][\mathrm{e}^{Y(t)}-\mathrm{e}^{Y^*(t)}]。$$

因为 e^x 是严格单增的,且 $0<\beta_1\leqslant\beta(t)\leqslant\beta_2$,所以$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(6)}$关于 $\boldsymbol{Y}^*(t)$ 是定负的,因此,**引理** 4 成立。

引理 5　对于 $I^*(t)$,$S^*(t)$ 以及方程(5)的任意解 $I(t)$ 有如下关系:

1)对任意的 $t\geqslant0$,方程(5)的唯一正周期解 $I^*(t)$ 满足 $I^*(t)<S^*(t)$;

2)对方程(5)的任意解 $I(t)$ 都存在 $t^*\geqslant0$,使得当 $t>t^*$ 时 $I(t)<S^*(t)$。

证明:

1)记 $I^*(t_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}I^*(t)$,则 $I^{*\prime}(t_0)=0$。因此有:

$$\beta(t_0)[S^*(t_0)-I^*(t_0)]=\mu(t_0)+\gamma$$

于是 $S^*(t_0)>I^*(t_0)$。

假设存在 $t_1>t_0$,使得对于 $t\in(t_0,t_1)$ 有 $S^*(t)>I^*(t)$ 且 $S^*(t_1)=I^*(t_1)$,则 $S^{*\prime}(t_1)-I^{*\prime}(t_1)\leqslant0$。另一方面:

$$\begin{aligned}S^{*\prime}(t_1)-I^{*\prime}(t_1)&=\mu(t_1)[b(t_1)-S^*(t_1)]-I^*(t_1)[\beta(t_1)(S^*(t_1)-I^*(t_1))-(\mu(t_1)-\gamma]=\\&\mu(t_1)b(t_1)+\gamma I^*(t_1)>0\end{aligned} \tag{7}$$

矛盾。因此,对任意的 $t\geqslant t_0$,都有 $S^*(t)>I^*(t)$。由于 $S^*(t)$ 与 $I^*(t)$ 均以 T 为周期,所以**引理** 5 的 1)成立。

2)假若**引理** 5 的 2)结论不成立,则仅会出现下列 2 种情形之一:情形 1,对于某一解 $I(t)$ 存在 $t'>0$,使得对于 $t>t'$ 有 $I(t)\geqslant S^*(t)$;情形 2,对于某一解 $I(t)$ 存在点列 $t_n(n=1,2,\cdots)$,$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$,使得当 $t\in(t_{2k-1},t_{2k})(k=1,2,\cdots)$ 时有 $S^*(t)<I(t)$,当 $t\in(t_{2k},t_{2k+1})(k=1,2,\cdots)$ 时有 $S^*(t)>I(t)$,且 $S^*(t_n)=I(t_n)$。

对于情形 1,当 $t\geqslant t'$ 时,$I'(t)=I(t)[\beta(t)(S^*(t)-I(t))-(\mu(t)+\gamma)]\leqslant-I(t)(\mu(t)+\gamma)\leqslant-I(t)(\mu_1+\gamma)$,于是有$\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0$。而 $S^*(t)\geqslant b_1>0$,出现矛盾,所以情形 1 不成立。

对于情形 2,显然有 $S^{*\prime}(t_{2k+1})-I'(t_{2k+1})\leqslant0$。另一方面,与式(7)类似地有 $S^{*\prime}(t_{2k+1})-I'(t_{2k+1})>0$。出现矛盾,故情形 2 也不成立。于是**引理** 5 的 2)成立。

由以上推理知,**引理** 5 成立。

定理 2 的证明　由**引理** 2、4、5,$(S^*(t)-I^*(t),I^*(t))$ 是系统(1)的唯一正周期解,同时,系统(1)等价于系统:

$$\begin{cases}N'(t)=\mu(t)[b(t)-N(t)]\\I'(t)=\beta(t)[N(t)-I(t)]-[\mu(t)+\gamma]I(t)\end{cases} \tag{8}$$

由**引理** 2、4,系统(8)的唯一正周期解$(S^*(t),I^*(t))$是全局渐近稳定的。因此**定理** 2 成立。

3　结束语

本文通过对具有双线性传染病的经典 SIS 传染病模引入周期性变化的疾病传播参数和借助微分方程比较定理和稳定性理论,建立并分析了一类具有周期性变化参数的 SIS 传染病模型,得到了决定该模型动力学形态的阈值。当该阈值小于 0 时,模型的无病周期解是全局渐近稳定的,即疾病最终灭绝;当该阈值大于 0 时,模型存在全局渐近稳定的地方病周期解,即疾病将持续存在于种群之中,并且易感者和染病者的数量会呈周期性变化。

参考文献:

[1] Ma Z, Li J. Dynamical modeling and analysis of epidemics[M]. New York: World scientific, 2009.
[2] Hethcote H W. The mathematics of infectious diseases[J]. SIAM reviews, 2000, 42: 599 – 653.
[3] Brauer F, Castillochavez C. Mathematical model in population biology and epidemiology[M]. New York: Springer, 2011.
[4] Li J, Ma Z. Stability analysis for SIS epidemic models with vaccination and constant population size[J]. Discrete and continuous dynamical systems: series B, 2004(4): 637 – 644.
[5] Thieme Horst R. Uniform persistence and permanence for non – autonomous semiflows in population biology[J]. Mathematical biosciences, 2000, 166: 173 – 201.
[6] Gerd Herzog, Ray Redheffer. Nonautonomous SEIRS and thron models for epidemiology and cell biology[J]. Nonlinear analysis: real world applications, 2004, 5: 33 – 44.
[7] Li M Y, Graef J R, Wang L, et al. Global dynamics of a SEIR models with varying total population size[J]. Mathematical biosciences, 1999, 160: 191 – 213.
[8] Piyawong W, Twiaell E H, Gumel A B. An unconditionally convergent finite – difference scheme for the SIR model[J]. Applied mathematics and computation, 2003, 146: 611 – 625.
[9] Dietz K, Schenzle D. Mathematical models for infections disease statistics[C]//A celebration of statistics the ISI centenary volume. Berlin: Springer, 1985: 103 – 108.
[10] Martcheva M. A nonautonomous multistrain SIS epidemic models[J]. Journal of biological dynamics, 2009, 3: 235 – 250.

(编辑:田新华)

A Kind of SIS Epidemic Model with Periodic Parameters

YANG You – she
(Science Institute, Air Force Engineering University, Xi′an 710051, China)

Abstract: The spread of some communicable diseases often has a certain periodicity. By incorporating the periodic parameters of disease transmission into the classical SIS epidemic model, an SIS epidemic model with periodic parameters is established. By means of the comparison theorem and the stability theory of ordinary differential equations, the threshold determining whether the disease dies out or not and determining the dynamical behaviors of the model is obtained via qualitative analysis. When the threshold is negative, the disease – free periodic solution of the model is globally asymptotic stable, which implies that the disease dies out eventually. When the threshold is positive, the disease – free periodic solution of the model is unstable, and the model still has a unique endemic periodic solution that is globally stable. This implies that the disease persists in the population, and that the number of the infected individuals will change with a certain periodicity.

Key words: epidemic model; periodic solution; globally asymptotic stability; threshold