第 11 卷第 6 期　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　Vol. 11　No. 6
2010 年 12 月　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　Dec. 2010

一种改进不等间距灰色预测模型

王晗中，　杨江平，　黄美荣，　刘　飞
(空军雷达学院，湖北　武汉　430019)

摘　要:传统不等间距灰色模型 UGM(1,1)及其改进型都是基于指数模型建立的,仅对指数变化规律序列有较好的预测精度,而对于常见的线性变化序列则预测误差较大。针对该问题,通过模型拓展,在现有文献模型的基础上增加线性因素,并采用新陈代谢的思想,提出一种改进不等间距灰色预测模型 AUGM(1,1),并进行实例仿真比较分析。结果表明:改进模型在预测精度和实用性上均有较大改善,且克服了传统灰色预测模型不适用于线性变化序列预测的局限,拓宽了灰色预测模型的适用范围。

关键词:灰色预测模型;UGM(1,1)模型;AUGM(1,1)模型
DOI:10. 3969/j. issn. 1009 -3516. 2010. 06. 016
中图分类号:TP301. 6;N941. 5　**文献标识码**:A　**文章编号**:1009 -3516(2010)06 -0075 -05

灰色预测模型广泛应用于“少数据”、“贫信息”、“不确定性”条件下的故障预测,但基本的灰色预测模型 GM(1,1)及其改进型都是基于等间距的条件建立的,而在预测实践中,完全等间距的数据很难获得,这大大限制了基本灰色预测模型的适用范围[1]。因此,建立不等间距的灰色预测模型具有更重要的现实意义。当前处理不等间距的方法主要有插值法[2]、生成新数列法[3-4]、传统不等间距灰色模型法 UGM(1,1)[5-6]。第 3 种方法克服了前 2 种方法的局限,且计算简便,预测精度较高,但其采用紧邻均值法的背景值构造方法不足以反映背景值在建模中的作用,且当序列变化急剧时,预测误差较大。针对传统 UGM(1,1)模型背景值构造的缺陷,文献[7]通过对一次累加生成序列的拟合来实现背景值的精确计算,提出了一种不等间距 GM(1,1)精确建模方法,有效提高了模型的预测精度。但由于其采用的是一种 $x^{(1)}(k_i)=ce^{dk_i}$ 的指数形式对一次累加生成序列进行拟合,因此仅对具有指数规律变化的序列有较好的预测精度,而对常见的线性变化序列预测则不适用。

1　传统 UGM(1,1)模型

假设原始数据序列为:

$$X^{(0)}(k_i)=\{x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_n)\} \tag{1}$$

式中 $\Delta k_i=k_i-k_{i-1}\neq\mathrm{const}$,$i=2,3,\cdots,n$。将间距作为乘子,对原始数据列进行一次累加生成,得:

$$X^{(1)}(k_i)=\{x^{(1)}(k_1),x^{(1)}(k_2),\cdots,x^{(1)}(k_n)\} \tag{2}$$

式中 $x^{(1)}(k_i)=\sum_{j=1}^{i}x^{(0)}(k_j)\Delta k_j$。对 $x^{(1)}(k_i)$ 建立白化微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(k)}{\mathrm{d}k}+ax^{(1)}(k)=b \tag{3}$$

* **收稿日期**:2009 -12 -07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61072132)
作者简介:王晗中(1980 -),男,江西吉安人,博士生,主要从事雷达装备维修保障研究;
E -mail:wanghanzhong98@163. com
杨江平(1963 -),男,浙江杭州人,教授,博士生导师,主要从事装备维修保障研究.

将微分方程离散化：

$$x^{(0)}(k_{i+1})+az^{(1)}(k_{i+1})=b \tag{4}$$

式中 $z^{(1)}(k_{i+1})$ 为 $x^{(1)}(k_i)$ 在区间 $[k_i,k_{i+1}]$ 上的背景值，采用紧邻均值法，令 $z^{(1)}(k_{i+1})=\frac{1}{2}[x^{(1)}(k_{i+1})+x^{(1)}(k_i)]$，$\hat{\boldsymbol{a}}=[a,b]^{\mathrm{T}}$，用矩阵形式表示式(4)，即：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\ \hat{\boldsymbol{a}} \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(k_2) & 1\\ -z^{(1)}(k_3) & 1\\ \cdots & \cdots\\ -z^{(1)}(k_n) & 1\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(k_2)\\ x^{(0)}(k_3)\\ \cdots\\ x^{(0)}(k_n)\end{bmatrix}$。采用最小二乘法求解式(5)得：

$$\hat{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} \tag{6}$$

将求得的灰参数 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 代入白化微分方程(3)，得一次累加序列的预测表达式：

$$\hat{x}^{(1)}(k_i)=\left(x^{(0)}(k_1)-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_i-k_1)}+\frac{b}{a},i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

再将式(7)累减还原，得原始数据的预测表达式：

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})-\hat{x}^{(1)}(k_i)}{\Delta k_{i+1}}=\frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1-\mathrm{e}^{a\Delta k_{i+1}})\left(x^{(0)}(k_1)-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(k_{i+1}-k_1)},i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

2 改进不等时距灰色模型

本文通过在文献[7]的一次累加生成序列拟合模型 $\hat{x}^{(1)}(k_i)=c\mathrm{e}^{dk_i}$($c,d$ 为常系数)中增加线性因素，使其同样适用于线性变化序列的预测，并结合新陈代谢思想[8]在实际预测中的意义，提出一种改进不等间距灰色模型 AUGM(1,1)。

选取原始数据序列的前 m 个数据作为初始建模数据，即 $X^{(0)}(k_i)=\{x^{(0)}(k_1),x^{(0)}(k_2),\cdots,x^{(0)}(k_m)\}$。设一次累加生成序列表达式为：

$$\hat{x}^{(1)}(k_i)=c_1\mathrm{e}^{vk_i}+c_2k_i+c_3,i=1,2,\cdots,m \tag{9}$$

式中 v,c_1,c_2,c_3 为待定参数。式(9)构建的基本思想是：当 $c_1=0$ 时，其为一般线性回归模型，可实现线性变化序列的预测；当 $c_2=0$ 时，则为传统的灰色预测模型，对指数变化序列有较高的预测精度。因此，采用式(9)构造的模型即适用于指数变化的序列预测，也同样适用于线性变化序列的预测。

该模型运算步骤如下：

1)v 值求解。

由式(9)得：

$$\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})-\hat{x}^{(1)}(k_i)=c_1(\mathrm{e}^{vk_{i+1}}-\mathrm{e}^{vk_i})+c_2(k_{i+1}-k_i) \tag{10}$$

又有 $\hat{x}^{(1)}(k_{i+1})-\hat{x}^{(1)}(k_i)=\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})\Delta k_{i+1}$，$k_{i+1}-k_i=\Delta k_{i+1}$，式(10)简化得：

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{c_1}{\Delta k_{i+1}}(\mathrm{e}^{vk_{i+1}}-\mathrm{e}^{vk_i})+c_2 \tag{11}$$

由式(11)可得：

$$\begin{cases}\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})-\hat{x}^{(0)}(k_i)=\dfrac{c_1}{\Delta k_{i+1}}(\mathrm{e}^{vk_{i+1}}-\mathrm{e}^{vk_i})-\dfrac{c_1}{\Delta k_i}(\mathrm{e}^{vt_i}-\mathrm{e}^{vk_{i-1}})\\ \hat{x}^{(0)}(k_i)-\hat{x}^{(0)}(k_{i-1})=\dfrac{c_1}{\Delta k_i}(\mathrm{e}^{vt_i}-\mathrm{e}^{vk_{i-1}})-\dfrac{c_1}{\Delta k_{i-1}}(\mathrm{e}^{vk_{i-1}}-\mathrm{e}^{vk_{i-2}})\end{cases},\quad i=2,3,\cdots,m-1 \tag{12}$$

用 $x^{(0)}(k_i)$ 取代 $\hat{x}^{(0)}(k_i)$，则由式(12)可得：

$$\frac{x^{(0)}(k_{i+1})-x^{(0)}(k_i)}{x^{(0)}(k_i)-x^{(0)}(k_{i-1})}=\frac{\dfrac{e^{vk_{i+1}}-e^{vk_i}}{\Delta k_{i+1}}-\dfrac{e^{vk_i}-e^{vk_{i-1}}}{\Delta k_i}}{\dfrac{e^{vk_i}-e^{vk_{i-1}}}{\Delta k_i}-\dfrac{e^{vk_{i-1}}-e^{vk_{i-2}}}{\Delta k_{i-1}}},\quad i=3,4,\cdots,m-1 \tag{13}$$

则 v 值可由式(13)求得,但应注意不同的 i 值对应不同的 v 值。考虑到灰色预测一般都应用于数据较少的序列,因此,一种合理的方法就是取其平均值为最后的 v 值,即:

$$v=\frac{1}{m-3}\sum_{i=3}^{m-1}v_i \tag{14}$$

2)c_1,c_2,c_3 值求解。

令 $l(k_i)=e^{vk_i}$,用 $x^{(1)}(k_i)$ 取代 $\hat{x}^{(1)}(k_i)$,则式(9)变为:

$$x^{(1)}(k_i)=c_1 l(k_i)+c_2 k_i+c_3 \tag{15}$$

用矩阵形式表示上式,并采用最小二乘法求解得:

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(1)} \tag{16}$$

式中:$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{bmatrix}x^{(1)}(k_1)\\ \cdots\\ x^{(1)}(k_n)\end{bmatrix}$;$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}l(k_1) & k_1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ l(k_n) & k_n & 1\end{bmatrix}$;$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}$。

3)数据还原。

将 v,c_1,c_2,c_3 值代入式(9),再经式(8)进行累减还原得预测值 $\hat{x}^{(0)}(k_{m+1})$。

4)新陈代谢。

添加 $\hat{x}^{(0)}(k_{m+1})$ 到原始数据序列并删除 $x^{(0)}(k_1)$,经过上述 3 个步骤,运算得 $\hat{x}^{(0)}(k_{m+2})$,再添加 $\hat{x}^{(0)}(k_{m+2})$ 到原始数据序列并删除 $x^{(0)}(k_2)$,同理运算得 $\hat{x}^{(0)}(k_{m+3})$,以此类推直到最后求得 $\hat{x}^{(0)}(k_n)$。

3　应用实例

为检验改进模型性能,选用文献[7]中算例。算例中钛合金疲劳强度随温度的变化实测数据见表 1。

表 1　钛合金疲劳强度与温度的关系

Tab. 1 The relation between fatigue strength and temperature of titanium alloy

温度/℃	100	130	170	210	240	270	310	340	380
疲劳强度 σ_{-1}	560.00	557.54	536.10	516.10	505.60	486.10	467.10	453.80	436.40

选用表 1 中前 6 个实测数据 $X^{(0)}(k_i)=\{560.00,557.54,536.10,516.10,505.60,486.10\}$ 用于建立预测模型,后 3 个实测数据用于模型预测检验。

3.1　传统 UGM(1,1)模型

根据第 1 节公式,采用 Matlab 编程计算可得:$a=0.000\,9$,$b=564.295\,7$。将 a 和 b 值代入式(8),得传统 UGM(1,1)模型的预测表达式:

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1})=\frac{1}{\Delta k_{i+1}}(1-e^{0.000\,9\Delta k_{i+1}})(x^{(0)}(k_1)-626\,995.22)e^{-0.000\,9(k_{i+1}-100)},\quad i=1,2,\cdots,9 \tag{17}$$

将 $k_7=310$,$k_8=340$,$k_9=380$ 代入上式,得相应预测值为:

$$\hat{x}^{(0)}(k_7)=471.836\,7,\hat{x}^{(0)}(k_8)=456.598\,4,\hat{x}^{(0)}(k_9)=441.874\,9$$

3.2　AUGM(1,1)模型

根据第 2 节计算公式,经 Matlab 编程计算得:

$$v_1=0.001\,4,\boldsymbol{C}=(-187\,060,860,129\,720)^{\mathrm{T}},\hat{x}^{(0)}(k_7)=467.590\,3$$

添加 $\hat{x}^{(0)}(k_7)$ 并删除 $x^{(0)}(k_1)$,计算得:

$$v_2=0.000\,8,\boldsymbol{C}=(-612\,790,107\,0,55\,7130)^{\mathrm{T}},\hat{x}^{(0)}(k_8)=454.201\,0$$

再添加 $\hat{x}^{(0)}(k_8)$ 并删除 $x^{(0)}(k_2)$,同理得:

$$v_3=0.0018, \boldsymbol{C}=(-102\,520, 750, 48\,680)^{T}, x^{(0)}(k_9)=435.6236$$

3 种模型的预测结果及相对误差见表 2。

表 2 不同模型预测结果及相对误差

Tab. 2 Prediction data and it's relative error of different models

实测数据		传统 UGM(1,1)模型		文献[7]模型		AUGM(1,1)模型	
温度/℃	疲劳强度	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)
310	467.10	471.836 7	0.949 2	469.010 3	0.343 8	467.590 3	0.040 7
340	453.80	456.598 4	0.616 7	453.491 0	0.067 5	454.201 0	0.088 4
380	436.40	441.874 9	1.254 6	438.523 6	0.485 2	435.623 6	0.179 9
平均相对误差 $\bar{\Delta}$(%)		0.940 2		0.298 8		0.103 0	

从表 2 中 3 种预测模型的平均相对误差 $\bar{\Delta}$ 可以看出,由于采用了新陈代谢的思想,及时将新数据置入模型并相应去除旧数据,充分利用了新数据包含的系统运行趋势信息,AUGM(1,1)模型的预测精度较文献[7]模型得到进一步提高。同样,为验证 AUGM(1,1)模型也适用于线性变化序列的预测,本文任意构造一线性函数:$y(t_i)=2t_i+3$,相应数据序列为:$t=(1,3,4,6,9,10,13,15,16)$,$y=(5,9,11,21,23,29,33,35)$。同样选用前 6 个数据建立预测模型,后 3 个数据用于模型预测检验。采用上述 3 种预测模型及计算方法,由于计算过程相同,此处直接给出各模型的预测结果及相对误差见表 3。

表 3 不同模型预测结果及相对误差

Tab. 3 Prediction data and it's relative error of different models

实测数据		传统 UGM(1,1)模型		文献[7]模型		AUGM(1,1)模型	
时间/s	数值	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)	预测值	相对误差(%)
13	29	30.016 9	2.949 2	29.088 4	0.305 2	29.304 5	1.050 0
15	33	40.022 7	21.280 9	37.745 6	14.380 6	32.816 1	0.5573
16	35	47.563 1	35.894 6	42.996 3	22.846 6	34.834 4	0.473 1
平均相对误差 $\bar{\Delta}$(%)		20.227 4		12.510 8		0.693 5	

可见文献[7]构建的不等间距灰色精确模型,虽通过背景值的精确计算,在预测精度上较传统 UGM(1,1)模型有所改善,但其预测误差仍然较大,无法满足实际需求。究其原因,主要是由于其对一次累加生成序列进行拟合时,采用的是指数函数的形式。AUGM(1,1)模型由于在原有模型的基础上增加了线性因素,从表 4 的预测结果可以看出,其对线性变化序列的预测仍保持了较高的预测精度,进一步拓展了传统灰色模型的应用范围。

4 结束语

本文针对文献[7]构建的不等间距灰色精确模型不适用于线性变化序列预测的不足,通过在原有模型的基础上增加线性因素,并结合新陈代谢思想在实际预测实践中的意义,提出了一种改进不等时距灰色模型,详细阐述了模型的建模和求解过程,最后通过算例仿真及比较分析。结果表明:改进模型在预测精度和实用性方面都得到较大改善。此外,AUGM(1,1)模型由于增加了线性因素,使其同样适用于线性变化序列的预测,进一步拓宽了传统灰色预测模型的应用范围,具有更广泛的应用价值。

参考文献:

[1] DENG Julong. A Novel GM(1,1) Model for Non - equigap Series[J]. The Journal of Grey System, 1993, 5(2):105 - 114.

[2] Ming Ling Hung, Kun Li Wen, John H Wu. The Application of Grey Theory to Interlude Analysis[J]. The Journal of Grey System, 1999, 11(2):133 - 138.

[3] 朱华吉,马少娟. 非等时空距 GM(1,1)模型在建筑物沉降预测中的应用[J]. 测绘工程,2001,10(4):39 - 41.
ZHU Huaji, MA Shaojuan. Application of Non - equal Interval Gray Model to Forecast of Building Subsidence[J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2001,10(4):39 - 41. (in Chinese)

[4] HSU Chechiang, CHEN Chiayon. Applications of Improved Grey Prediction Model for Power Demand Forecasting[J]. Energy Conversion and Management, 2003,4 (4):2241 -2249.

[5] ZHENG Shibao. Modeling of Non - equigap GM(1,1)[J]. The Journal of Grey System, 1993, 5(2):95 -104.

[6] 王钟羡,吴春笃. GM(1,1)改进模型及其应用[J]. 数学的实践与认识,2003,33(9):20 -25.
WANG Zhongxian,WU Chundu. The Establishment and Application of An Improved GM(1,1) Model[J]. Mathematics in Practice and Theory,2003,33(9):20 -25. (in Chinese)

[7] 李俊峰. 灰色系统建模理论与应用研究[D]. 杭州:浙江理工大学,2005.
LI Junfeng. The Establishment and Application of Grey System Theory [D]. Hangzhou:Zhejiang Sci - Tech University, 2005. (in Chinese)

[8] 李峰,刘静延,蒋录全. 新陈代谢 GM(1,1)模型在全社会用电量预测中的应用[J]. 武汉理工大学学报:交通科学与工程版,2005,29(2): 259 -261.
LI Feng,LIU Jingyan,JIANG Luquan. Application of Information Renewal GM(1,1) Model to Prediction of Whole Social Demand of Electric Power[J]. Journal of Wuhan University of Technology:Transportation Science & Engineering,2005,29(2): 259 -261. (in Chinese)

(编辑:徐敏)

An Amendatory Unequal Interval Grey Prediction Model

WANG Han - zhong, YANG Jiang - ping, HUANG Mei - rong,LIU Fei
(Air Force Radar Academy, Wuhan 430019, China)

Abstract:GM(1,1) model is widely applied in the uncertainty prediction of less data and poor information, but it is often limited in true application because it is established with equal interval, then the grey prediction model with unequal interval performs a more important realistic function. Currently, the traditional unequal interval grey model (UGM(1,1)) and its amendatory model are established based on exponential model, which could not fit on linear series prediction. In order to overcome the drawbacks of the traditional unequal interval grey model (UGM(1,1)) and its amendatory model, a new amendatory unequal interval grey model (AUGM(1,1)) is proposed by adding linear ingredient and adopting the metabolism theory. The result of simulation and the comparative analysis show that the amendatory model is better than the UGM(1,1) model in accuracy and practicality, and overcomes the shortage that the traditional one could not be used in linear series, in this way, the application field of the grey model is expanded.

Key words:grey prediction model; unequal interval grey model; amendatory unequal interval grey model