

二维异向介质的传输模式

余侃民, 马嘉俊, 曹祥玉, 刘 涛
(空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

摘 要:针对异向介质一般表现为各向异性的特点,分析了异向介质的传输模式及传输条件。通过将 \mathbf{k} 矢量坐标轴与物理空间坐标轴相重合,并引入传输角度参量,建立了异向介质的色散方程。以传输角度为条件将异向介质分为 4 种类型:① k_x -cutoff 类型;② k_y -cutoff 类型;③ Never-cutoff 类型;④Always cutoff 类型,这使得异向介质的电磁波传输模式更具直观效果。利用 k 曲线对各类型异向介质的折射与反射特性进行描述,并采用色散时域有限差分法进行仿真验证,数值结果与理论分析取得良好一致。

关键词:异向介质;色散 FDTD;负折射

DOI:10.3969/j.issn.1009-3516.2010.06.013

中图分类号: TN45 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2010)06-0060-05

近年来,异向介质在光学、电磁学、材料科学以及应用物理学领域受到越来越多的关注。所谓异向介质是指材料的相对介电常数和磁导率张量的分量不全大于零的一类人工复合材料,例如左手材料^[1-5]和电磁 cloak 材料^[6-9]均可视为异向介质。异向介质在自然界中并不直接存在,只能通过人工方法实现。2000 年 Smith 等人通过对细导线阵列与 SRR 谐振环阵列的合理布局,制造出首例人工复合左手材料^[3],2008 年 Landy 等人巧妙地利用 SRR 谐振环制作出首例人工电磁 cloak 材料^[8]。这些工作成果极大的刺激了人们的研究热情,使得异向介质的研究进入实质性阶段。

然而异向介质由于自身结构的原因一般都表现出各向异性的特点,因此有必要对异向介质的传输模式及传输条件进行详细分析,可对其设计测量提供理论指导。基于此,本文详细推导了异向介质色散方程,通过将 \mathbf{k} 矢量坐标轴与物理空间坐标轴相重合,引入传输角度参量的方法,将异向介质的传输模式与传输角度相关。以传输角度为条件将异向介质划分为不同于文献[10]的 4 种类型,这样的划分方式由于和传输角度相关,因此具有更好的直观效果。随后采用色散时域有限差分法(FDTD)^[11]对这 4 种类型异向介质的传输模式进行了仿真验证,数值结果与理论分析取得了良好的一致性,并且直观的数值图像有助于加深对异向介质奇特电磁波传输模式的理解与认识,为异向介质的设计制作提供理论上的指导。

1 二维异向介质的色散方程

为了分析简单又不失一般性,假设异向介质的介电常数 ε 和磁导率 μ 张量均为对角阵,即:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

由于异向介质的概念将媒质参数的取值扩展到整个实数域范围,即上式 ε 、 μ 张量的各分量均有可能取

* 收稿日期:2010-07-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60671001);陕西省自然科学基金基础研究重点资助项目(2010JZ010);陕西省自然科学基金基础研究资助项目(SJ08-ZT06)

作者简介:余侃民(1963-),男,湖北武汉人,副教授,主要从事无线通信技术研究。

E-mail:lt9571@163.com.

为负值,因此有必要对异向介质的色散特性重新进行分析。设入射平面波沿 y 轴极化,沿 $\mathbf{k} = k_x \hat{u}_x + k_z \hat{u}_z$ 矢量方向入射,即具有如下形式:

$$\mathbf{E} = e^{j\omega t - j(k_x x + k_z z)} \hat{u}_y \quad (2)$$

对于平面波,Maxwell 方程组可写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \mathbf{D} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由矢量恒等式 $\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{a} = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) - k^2 \mathbf{a}$ 和式(3)可得:

$$\mathbf{k}^2 \mathbf{H} - \mathbf{k} \left(1 - \frac{\mu_x}{\mu_z} \right) k_z H_z = \omega^2 \varepsilon_y \mu_x \mathbf{H} \quad (4)$$

将上式写成矩阵形式有:

$$\begin{pmatrix} k^2 - \omega^2 \varepsilon_y \mu_x & -(1 - \mu_x/\mu_z) k_z k_x \\ 0 & k^2 - \omega^2 \varepsilon_y \mu_x - (1 - \mu_x/\mu_z) k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

式中如果磁场 \mathbf{H} 有非零解,其系数行列式必为零,则有:

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_y \mu_x \quad (6)$$

或

$$\mu_x k_x^2 + \mu_z k_z^2 = \omega^2 \varepsilon_y \mu_x \mu_z \quad (7)$$

式(6)即为异向介质中寻常波的色散方程,式(7)为非常波的色散方程。

假设电磁波在异向介质中的 \mathbf{k} 矢量与光轴 x 的夹角为 θ ,其取值范围定义为 $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$,则式(7)可写为

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon_y \mu_x}{1 - (1 - \mu_x/\mu_z) \cos^2 \theta} \quad (8)$$

电磁波能够在异向介质中传输, \mathbf{k} 矢量必须取实数,即式中媒质参数 ε_y 、 μ_x 、 μ_z 以及传输角度 θ 需满足如下2种情况不等式关系。

$$\begin{cases} \varepsilon_y \mu_x > 0 \\ 1 - (1 - \mu_x/\mu_z) \cos^2 \theta > 0 \end{cases} \quad (9) \quad \begin{cases} \varepsilon_y \mu_x < 0 \\ 1 - (1 - \mu_x/\mu_z) \cos^2 \theta < 0 \end{cases} \quad (10)$$

由式(9),若 $\varepsilon_y \mu_x > 0$ 且 $\mu_x/\mu_z > 0$,则对任意 θ 都可使该式成立,若 $\mu_x/\mu_z < 0$,则 θ 需满足 $\cos^2 \theta < \frac{1}{1 - \mu_x/\mu_z}$ 可使该式成立。

同理,对于式(10),若 $\varepsilon_y \mu_x < 0$ 且 $\mu_x/\mu_z > 0$,则对任意 θ 都不能使该式成立。若 $\mu_x/\mu_z < 0$,则 θ 需满足 $\cos^2 \theta > \frac{1}{1 - \mu_x/\mu_z}$ 可使该式成立。

因此可定义临界角 $\theta_c = \arccos \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \mu_x/\mu_z}} \right)$,将异向介质分为4种类型:① k_z -cutoff 类型;② k_x -cutoff 类型;③ Never-cutoff 类型;④ Always cutoff 类型。

由 \mathbf{k} 矢量的表达式(8)可得到异向介质的相速、群速及折射率分别表示为:

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{k} = \frac{(1 - (1 - \mu_x/\mu_z) \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varepsilon_y} \sqrt{\mu_x}} \\ n_e &= \frac{c}{v_p} = \frac{c \sqrt{\varepsilon_y} \sqrt{\mu_x}}{(1 - (1 - \mu_x/\mu_z) \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \\ v_g &= \nabla_k(\omega) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{k_x}{\varepsilon_y \mu_x} \hat{u}_x + \frac{k_z}{\varepsilon_y \mu_x} \hat{u}_z \right) \end{aligned} \quad (11)$$

2 数值验证及分析

采用二维 TM 模式色散 FDTD 方法对异向介质的反射和折射特性进行数值验证。计算中仅有 E_y, H_x 和 H_z 3 个场分量,采用正方形网格 $\Delta = \lambda/80$ 进行空间剖分,采用 5 层 PML 吸收边界截断。

2.1 激励波束的设置

激励波束由总场/散射场连接边界引入,采用图 1 所示的连接边界设置方法。其中图 1(a)为垂直入射时的设置方法,入射波在由 3 条连接边界组成的方形区域中被激励后由缺口处产生近似平面波束向自由空间传播。图 1(b)为斜入射情况的设置方法,入射波在由 2 条连接边界组成的区域内被激励并向自由空间传播。图 2 给出了自由空间中入射波束在垂直入射($\theta = 0^\circ$)和斜入射($\theta = 45^\circ$)情况下的 FDTD 模拟结果。

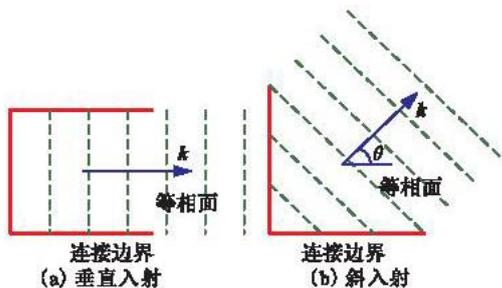


图 1 激励波束的设置方法

Fig.1 Set-up method of stimulation wavebeam

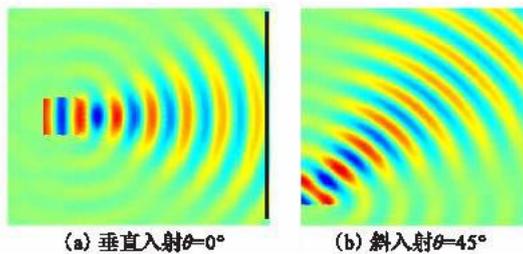


图 2 自由空间激励波束的电场强度分布

Fig.2 Electric field intensity distribution

of stimulation wavebeam in free space

2.2 k_z -cutoff 类型

该类型异向介质需满足的媒质参数条件为 $\epsilon_y \mu_x > 0$, $\mu_x \mu_z < 0$, 传输角度条件应满足 $|\theta_c| < |\theta| < 180^\circ - |\theta_c|$ 。为了计算简单取满足该条件的 2 种媒质参数组合 $\epsilon_y = 1, \mu_x = 1, \mu_z = -1$ 和 $\epsilon_y = -1, \mu_x = -1, \mu_z = 1$, 代入式(7)可得该情况下的 k 曲线为焦点位于 k_z 轴的双曲线,由式(11)可确定其传输相速、群速的方向,如图 3 所示。例如对于 $\epsilon_y = 1, \mu_x = 1, \mu_z = -1$, 由式(11)可知相速 $v_p > 0$, 与 k 矢量同方向, 折射率 $n_e > 0$, 群速 v_g 与 k 矢量关于 z 轴对称。这意味着在此类型异向介质中相速与群速将沿不同方向传输。并且由于临界角 $\theta_c = 45^\circ$, 因此仅在 $45^\circ < |\theta| < 135^\circ$ 的传输角度范围内才可激励起这样的非常波传输模式。

图 4(a)和(b)分别给出了 FDTD 计算得到异向介质参数分别取 $\epsilon_y = 1, \mu_x = 1, \mu_z = -1$ 和 $\epsilon_y = -1, \mu_x = -1, \mu_z = 1$ 两种情况,入射平面波束在 $\theta = 60^\circ$ 角照射下的空间电场强度分布。从图 4 可以看出, FDTD 的计算结果完全符合图 3 中的理论分析结果。

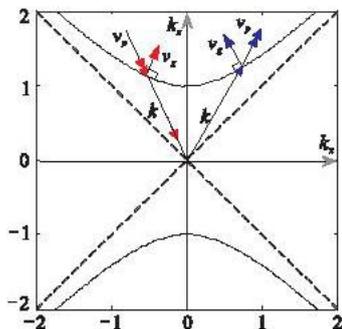


图 3 k_z -cutoff 类型异向介质色散曲线

Fig.3 Dispersion curve of k_z -cutoff type's metamaterials

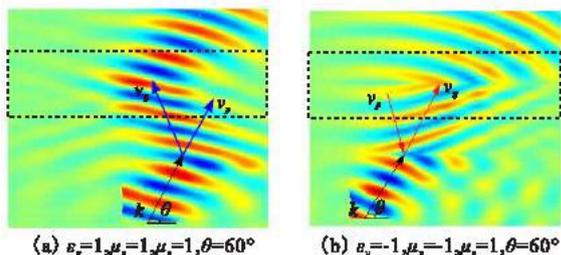


图 4 k_z -cutoff 类型异向介质电场强度分布

Fig.4 Electric field intensity distribution of k_z -cutoff type's metamaterials

2.3 k_x -cutoff 类型

该类型媒质参数条件为 $\epsilon_y \mu_x < 0$, $\mu_x \mu_z < 0$, 传输角度应满足 $|\theta| < |\theta_c|$ 。取二维异向介质板参数分别为 $\epsilon_y = 1, \mu_x = -1, \mu_z = 1$ 和 $\epsilon_y = -1, \mu_x = 1, \mu_z = -1$, 得到该条件下的 k 曲线及相速群速的关系如图 5 所示, 准平面波束在 $\theta = 30^\circ$ 角照射下的 FDTD 空间电场强度分布如图 6 所示, 数值模拟结果同理论分析结果一致。

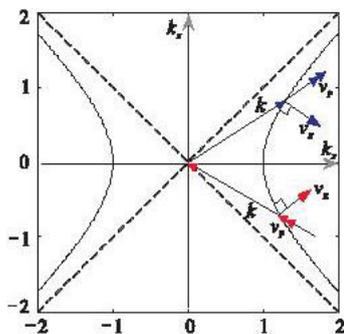


图 5 k_x - cutoff 类型异向介质色散曲线
Fig. 5 Dispersion curve of k_x - cutoff type's metamaterials

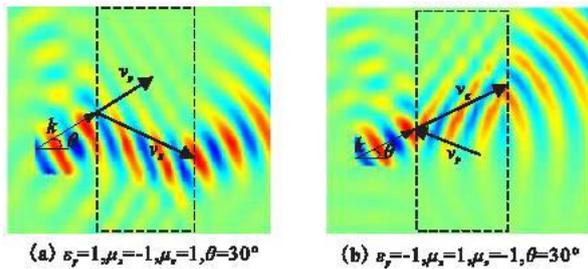


图 6 k_x - cutoff 类型异向介质电场强度分布
Fig. 6 Electric field intensity distribution of k_x - cutoff type's metamaterials

2.4 Never - cutoff 类型

电磁波在该类型异向介质中的传输条件与传输角度无关, 仅需介质参数满足 $\epsilon_y \mu_x > 0$, $\mu_x \mu_z > 0$ 即可。仍然有两种参数取值组合可以满足该条件: $\epsilon_y = 1, \mu_x = 1, \mu_z = 1$ 和 $\epsilon_y = -1, \mu_x = -1, \mu_z = -1$ 。前者是普通的双正媒质材料, 后者一般称为双负材料或左手材料。由式(11)可知这种左手材料折射率 $n_e < 0$, 群速与相速位于同一方向但模值相反。同样图 7 给出了该类型异向介质的 k 曲线, 图 8 给出入射波束分别为 $\theta = 90^\circ$ 和 $\theta = 60^\circ$ 照射下的 FDTD 模拟结果, 符合理论分析的结果。

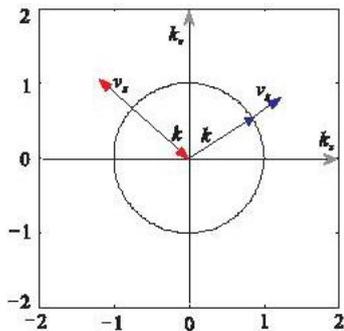


图 7 Never - cutoff 类型异向介质色散曲线
Fig. 7 Dispersion curve of Never - cutoff type's metamaterials

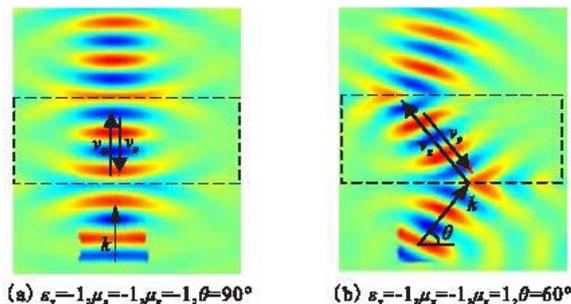


图 8 Never - cutoff 类型异向介质电场强度分布
Fig. 8 Electric field intensity distribution of Never - cutoff type's metamaterials

2.5 Always - cutoff 截止条件

当 $\epsilon_y \mu_x < 0$, $\mu_x \mu_z > 0$ 成立时对于任意传输角度 θ 都无法由式(8)得到 k 矢量的实数解, 因此在该类型异向介质中不存在电磁波传输模式, 入射波以任意角度照射到该介质板上都会发生全反射现象, 如图 9 给出的入射波束分别沿 $\theta = 90^\circ$ 和 $\theta = 45^\circ$ 方向照射下的 FDTD 模拟结果。

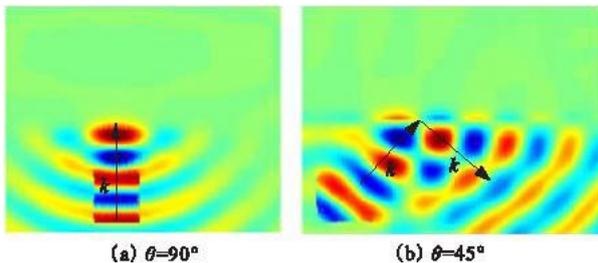


图 9 Always - cutoff 类型异向介质电场强度分布
Fig. 9 Electric field intensity distribution of always - cutoff type's metamaterials

3 结束语

本文主要对电磁波在二维异向介质的传输模式进行了详细分析。推导了二维异向介质的一般色散方程, 通过在色散方程中引入传输角度参量对异向介质进行分类, 这种分类方法使得传输模式与传输角度相关, 因此更具有视觉上的直观效果。随后采用 k 曲面对这 4 种类型异向介质的折射和反射特性进行了详细

描述,同时采用色散时域有限差分法对理论分析的结果进行了仿真验证,数值结果证明了理论分析的正确性。

参考文献:

- [1] Veselago V G. The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ϵ and μ [J]. Sov Phys Usp, 1968, 10(4): 509 - 514.
- [2] Smith D R, Padilla W J. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity[J]. Phys Rev Lett, 2000, 84(18): 4184 - 4187.
- [3] Smith D R, Kroll N. Negative Refractive Index in Left - handed Materials[J]. Phys Rev Lett, 2000, 85: 2933 - 2936.
- [4] Ziolkowski R W. Pulsed and CW Gaussian Beam Interactions with Double Negative Metamaterials Labs[J]. Opt Express, 2003, 11(7): 662 - 681.
- [5] Loc Markle, Eleftheriades George V. A Negative - Refractive - Index Metamaterial for Incident Plane Waves of Arbitrary Polarization[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2007, 6: 28 - 32.
- [6] Pendry J B, Schurig D, Smith D R. Controlling Electromagnetic Fields[J]. Science, 2006, 312(5781): 1780 - 1782.
- [7] Schurig D, Mock J J. Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies[J]. Science, 2006, 314(5801): 977 - 980.
- [8] Landy N I, Sajuyigbe S, Mock J J, et al. Perfect Metamaterial Absorber[J]. Phys Rev Lett, 2008, 100: 207402.
- [9] Pekka Alitalo, Olli Luukkonen, Liisi Jylh. Transmission - Line Networks Cloaking Objects from Electromagnetic Fields[J]. IEEE Transactions on AP, 2008, 56(2): 416 - 424.
- [10] Smith D R, Schurig D. Electromagnetic Wave Propagation in Media with Indefinite Permittivity and Permeability Tensors[J]. Phys Rev Lett, 2003, 90(7): 077405.
- [11] Zhao Y, Christos A, Hao U. Full - wave Finite - difference Time - domain Simulation of Electromagnetic Cloaking Structures [J]. Opt Express, 2008, 16(9): 6717 - 6730.

(编辑:徐楠楠)

Wave Propagation in Biaxial Anisotropic Metamaterials

YU Kan - min, MA Jia - jun, CAO Xiang - yu, LIU Tao

(Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: Aimed at the anisotropic characteristic of metamaterials, the propagation modes and the propagation conditions of metamaterials are analyzed. Through superposing the vector coordinate axis and the physical space coordinate axis, and introducing the parameter of the wave propagation angle, the dispersion relation of biaxial anisotropic metamaterial is derived. Based on the wave propagation angle, four classes of medium are identified as: ① k_z - cutoff type; ② k_x - cutoff type; ③ Never - cutoff type; ④ Always - cutoff type. This classification makes the propagation mode of electromagnetic wave take on more intuitionistic effect. The characteristics of refraction and reflection of metamaterials are analyzed by the wave vector curve, simulated and verified by using the dispersive finite difference time domain method. The numerical results well conform to the theoretic analysis.

Key words: metamaterials; dispersion FDTD; negative refraction