第11卷第5期　　空　军　工　程　大　学　学　报(自然科学版)　　Vol.11　No.5
2010年10月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Oct.2010

用 Zernike 多项式拟合干涉波面不同算法的等价性研究*

莫卫东， 范　琦， 张海防， 冯明德， 杨百愚， 贾晋超
(空军工程大学　理学院，陕西　西安　710051)

摘　要:通过严格证明在 Zernike 多项式拟合光学干涉波面时,求解拟合系数的2种典型算法即最小二乘法和 Gram - Schimdt 算法的等价性,论证了求解 Zernike 多项式拟合系数的各种算法在求解过程中具有相同的稳定性。研究发现当其中一种算法在求解过程因故中断或拟合的干涉波面出现了突变,则另一种算法同样无法实现对该干涉波面的正确拟合。研究结果表明:用 Zernike 多项式拟合干涉波面,没有哪一种算法更优于其他算法,仅仅是求解过程不同而已,各种算法的可靠性是等价的。

关键词:Zernike 多项式;干涉波面;最小二乘法;Gram - Schimdt 算法;算法等价性
DOI:10.3969/j.issn.1009 - 3516.2010.05.019
中图分类号:O436　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009 - 3516(2010)05 - 0090 - 05

如何正确求解出 Zernike 多项式拟合干涉波面的拟合系数已成为现代数字化干涉精密检测技术的重要组成部分[1-8]。不同研究者都强调所采用算法的优势并都给出了充分的理由。然而,实践中不论采用哪一种算法都无法绝对避免求解拟合系数过程中可能的失败或测量结果的突变。如何找到一个求解 Zernike 多项式拟合系数的最佳算法,使得拟合系数的求解过程简洁快速且稳定,确保测量结果的可靠性,成为该领域研究的重点。

求解 Zernike 多项式拟合系数的算法包括典型的最小二乘法和 Gram - Schimdt 方法以及 Householder 变换方法。实际上,在众多的算法中,只有2类基本算法,一类是直接应用最小二乘法求解 Zernike 多项式拟合系数,另一类则是利用 Zernike 多项式构造一个新的正交归一化的函数系,再对该新的函数系应用最小二乘法求解拟合系数[9-11]。以下通过证明最小二乘法与 Gram - Schimdt 方法的等价性,说明各种算法之间是相通的,其收敛性是等价的。

1　求解 Zernike 多项式拟合系数的最小二乘法

Zernike 多项式用极坐标的具体表达为:

$$Z_n^l(\rho)=R_n^l(\rho)\Theta_n^l(\theta)$$

式中:n 为多项式的“阶”, 取值为0,1,…;l 为与阶数 n 相关的序号,l 的值恒与 n 同奇偶性,且绝对值小于或等于阶数 n。拟合时选取的阶 n 越大,加入拟合的多项式数量 N 将越多。用 Zernike 多项式表达的光学干涉波面 W 的函数为:

$$W(\rho,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k Z_n^l(\rho,\theta)\quad 或\ W(\boldsymbol{r}_j)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k Z_k(\boldsymbol{r}_j)$$

式中:a_k 为拟合系数;$\boldsymbol{r}_j$ 为对干涉波面数字化后采样点的位置矢量,应用时常采用直角坐标系波函数 $W(x,y)$,因此 Zernike 多项式为 $Z_k(x,y)$。根据最小二乘法原理,求解 a_k 的方法与过程如下:

* **收稿日期**:2010 - 4 - 1
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2010JM8012)
作者简介:莫卫东(1959 -),男,广西合浦人,教授,主要从事精密光学检测研究.E - mail:mwd1999@126.com

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{M}\Big[\sum_{i=1}^{N} a_i Z_i(\boldsymbol{r}_j) - \varphi(\boldsymbol{r}_j)\Big]^2 \tag{1}$$

式中:$\varphi(\boldsymbol{r}_j)$ 为干涉波面 $\boldsymbol{r}_j$ 点的相位;$\sum_{j=1}^{M}$ 为对所有采样点求和,$\sum_{i=1}^{N}$ 为对多项式的所有项求和。又有:

$$\frac{\partial}{\partial a_k}(\Delta^2) = 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_i Z_i(\boldsymbol{r}_j) Z_k(\boldsymbol{r}_j) - 2\sum_{j=1}^{M}\varphi(\boldsymbol{r}_j) Z_k(\boldsymbol{r}_j) = 0 \tag{2}$$

令 $S_{i+k} = \sum_{j=1}^{M} Z_i(\boldsymbol{r}_j) Z_k(\boldsymbol{r}_j)$,$t_k = \sum_{j=1}^{M}\varphi(\boldsymbol{r}_j) Z_k(\boldsymbol{r}_j)$,则式(2) 变成:

$$\sum_{i=1}^{N} S_{i+k} a_i = t_k \tag{3}$$

式(3) 为最小二乘法正则方程,将其展开便是关于 a_i 的线性方程组。S_{i+k} 系数方阵的性质表征了求解 a_i 的稳定性。实践表明,用最小二乘法求解多项式拟合系数,逻辑关系简洁,方法通用,收敛性令人满意。

2　求解 Zernike 多项式拟合系数的 Gram - Schimdt 正交化方法

Gram - Schimdt 正交化方法的基本思想是将线性独立函数系 Zernike 多项式进行线性组合,构成一组在干涉波面采样数据点上离散正交归一化的基底函数系$[V_i]$,即:

$$[V_i] = [C_{ik}][Z_i] \tag{4}$$

$[C_{ik}]$ 为变换方阵,$[V_i]$ 和$[Z_i]$ 分别为 V_i 和 Z_i 构成的列向量。$[V_i]$ 中的每一个元素均满足正交化条件:

$$\sum_{j=1}^{M} V_i V_k G = \begin{cases} 1 \quad , \quad i = k \\ 0 \quad , \quad i \neq k \end{cases} \tag{5}$$

$\sum_{j=1}^{M}$ 为对所有采样点求和;G 为非负的全函数,一般取值为 1。根据式(4) 和(5) 可得$[V_i]$ 和$[Z_i]$ 的关系:

$$V_i = \frac{Z_i - \sum_{r=1}^{i-1} V_r \sum_{j=1}^{M} Z_i V_r}{\Big[\sum_{j=1}^{M} Z_i^2 - \sum_{r=1}^{i-1}\Big(\sum_{j=1}^{M} Z_i V_r\Big)^2\Big]^{1/2}} \tag{6}$$

变换矩阵$[C_{ik}]$ 为:

$$C_{ik} = \begin{cases} 0 & , \quad i < k \\ \Big[\sum_{j=1}^{M} Z_i^2 - \sum_{r=1}^{i-1}\Big(\sum_{j=1}^{M} Z_i V_r\Big)^2\Big]^{1/2} & , \quad i = k \\ -\sum_{r=1}^{i-1}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{M} Z_i V_r\Big) C_{ii} C_{rk}\Big] & , \quad i > k \end{cases} \tag{7}$$

被拟合的干涉波面 $F(\boldsymbol{r})$ 用矩阵表示为:

$$F(\boldsymbol{r}) = [a_i]^{\mathrm{T}}[Z_i] = [a_i]^{\mathrm{T}}[C_{ik}]^{-1}[V_i] = [b_i]^{\mathrm{T}}[V_i] = \sum_{i=1}^{N} b_i V_i \tag{8}$$

式中 $[b_i]^{\mathrm{T}} = [a_i]^{\mathrm{T}}[C_{ik}]^{-1}$。

根据最小二乘法原理:

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{M}[F(\boldsymbol{r}_j) - \varphi(\boldsymbol{r}_j)]^2 = \sum_{j=1}^{M}\Big[\sum_{i=1}^{N} b_i V_i(\boldsymbol{r}_j) - \varphi(\boldsymbol{r}_j)\Big]^2 =$$

$$\sum_{j=1}^{M}\Big(\sum_{i=1}^{N} b_i V_i(\boldsymbol{r}_j)\Big)^2 - 2\sum_{j=1}^{M}\varphi(\boldsymbol{r}_j)\sum_{i=1}^{N} b_i V_i(\boldsymbol{r}_j) + \sum_{j=1}^{M}\varphi(\boldsymbol{r}_j)^2 \tag{9}$$

利用式(5) 关于 V_i 的正交关系可得:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{N}\Big[b_i^2 - 2b_i\sum_{j=1}^{M}\varphi(\boldsymbol{r}_j)\ V_i(\boldsymbol{r}_j)\Big] + \sum_{j=1}^{M}\varphi(\boldsymbol{r}_j)^2$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial b_i} = 2\left[\sum_{i=1}^{N} b_i - \sum_{j=1}^{M} \varphi(\boldsymbol{r}_j)\ V_i(\boldsymbol{r}_j)\right] = 0$$

故可得:

$$b_i = \sum_{j=1}^{M} \varphi(\boldsymbol{r}_j)\ V_i(\boldsymbol{r}_j) \tag{10}$$

把根据式(10)求得的$[b_i]$代回式(9)中,便可得所需要的 Zernike 多项式拟合干涉波面的拟合系数$[a_i]$。

3 最小二乘法与 Gram - Schimdt 方法的等价性证明

根据 Gram - Schimdt 正交化方法,在没有用到最小二乘法原理之前,由式(4)和式(7)可得:

$$Z_i = \sum_{k=1}^{i} C_{ik}^{-1}\ V_i \tag{11}$$

把式(11)代入式(8)中,得:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i\left(\sum_{k=1}^{i} C_{ik}^{-1}\ V_k\right) = \sum_{i=1}^{N} b_i V_i$$

$$\sum_{j=1}^{M}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i\left(\sum_{k=1}^{i} C_{ik}^{-1}\ V_k\right) V_k\right] = \sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N} b_i V_i\right) V_k \tag{12}$$

利用式(5),上式变成:

$$b_k = \sum_{i=1}^{N} a_i C_{ik}^{-1} \quad , \quad j \leqslant i \tag{13}$$

式(13)为从 Gram - Schimdt 正交化方法推导出来的用最小二乘法原理进行 Zernike 多项式拟合的系数$[a_i]$与用 Gram - Schimdt 正交化方法进行拟合的系数$[b_i]$之间的变换关系。

反过来,也可以从最小二乘法原理出发,推导出 2 种方法所获得的拟合系数变换关系完全相同。由此充分说明了 2 种拟合系数的求解算法是完全等价的。从最小二乘法原理出发的推导过程如下:

由最小二乘法获得的正则方程式(3)可得:

$$\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i Z_i(\boldsymbol{r}_j) Z_k(\boldsymbol{r}_j)\right) = \sum_{j=1}^{M} \varphi(\boldsymbol{r}_j) Z_k(\boldsymbol{r}_j) \tag{14}$$

把式(11)代入式(14)则得:

$$左 = \sum_{j=1}^{M}\left[\sum_{i=1}^{N} a_i\left(\sum_{n=1}^{i} C_{in}^{-1}\ V_n\right)\left(\sum_{m=1}^{k} C_{km}^{-1}\ V_m\right)\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{j=1}^{M}\left[\left(\sum_{n=1}^{i} C_{in}^{-1}\ V_n\right)\left(\sum_{m=1}^{k} C_{km}^{-1}\ V_m\right)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i\left(\sum_{m=1}^{k} C_{im}^{-1}\ C_{km}^{-1}\right) = \sum_{m=1}^{k}\left(\sum_{k=1}^{N} a_i C_{im}^{-1}\right) C_{km}^{-1} \quad , \quad n \leqslant i,\ m \leqslant k,\ k \leqslant i$$

同理

$$右 = \sum_{j=1}^{M} \varphi\left(\sum_{m=1}^{k} C_{km}^{-1}\ V_m\right) = \sum_{m=1}^{k} C_{km}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{M} \varphi\ V_m\right) = \sum_{m=1}^{k} C_{km}^{-1}\ b_m \quad , \quad n \leqslant i,\ m \leqslant k,\ k \leqslant i$$

左 = 右,可得:

$$b_m = \sum_{i=1}^{N} a_i C_{im}^{-1} \quad , \quad m \leqslant i \tag{15}$$

4 结束语

采用 Zernike 多项式拟合干涉波面是现代数字化光学精密测量的核心技术之一。本文通过推导研究,澄清了多年来有关求解 Zernike 多项式拟合系数的算法之争,明确了在同样条件下,任何算法都不可能比其他算法具有更好的解的稳定性以及测量结果的可靠性。进一步的研究发现:只要在拟合时所选择的 Zernike 多

项式的阶小于被测干涉波面光瞳内干涉条纹的数量,不论采用何种算法,都可以确保 Zernike 多项式对采样的拟合精度和拟合干涉波面函数的精度,从而确保检测系统测量结果的可靠性。可见,若被测干涉波面光瞳内干涉条纹的数量足够多时(多于 7 根条纹以上),选择 7 阶(36 项)以下 Zernike 多项式进行拟合都会得到一致正确的测量结果。

参考文献:

[1] 田秀云, 吴时彬, 伍凡,等. 高精度大口径平面镜瑞奇 - 康芒定量检测方法研究[J]. 光学技术, 2004,30 (4):486 - 488.
TIAN Xiuyun, WU Shibin, WU Fan, et al. Quantitative Test Method of Ritchey - Common Test in Large High Precision Flat Measurements[J] . Optical Technique, 2004,30 (4): 486 - 488. (in Chinese)

[2] 侯溪,伍凡,吴时彬,等. 使用环形子孔径拼接检测大口径非球面镜[J]. 光学技术,2005,31 (4):506 - 508.
HOU Xi,WU Fan,WU Shibin,et al. Testing the Large Aspheric Mirror Using Annular Subapertures[J]. Optical Technique, 2005,31 (4):506 - 508. (in Chinese)

[3] 曹正林,廖文和,沈建新,等. 人眼像差的数学表示及主观式波前像差测量仪的设计与应用[J]. 应用激光, 2005, 25 (4):274 - 278.
CAO Zhenglin, LIAO Wenhe,SHEN Jianxin,et al. Mathematical Expression of the Human Eye's Aberration and the Designing and Application of Subjective Wave - front Aberrometer [J]. Applied Laser, 2005, 25(4):274 - 278. (in Chinese)

[4] 卢振武,刘华,李凤有. 利用曲面计算全息图进行非球面检测[J]. 光学精密工程,2004,12 (6):555 - 559.
LU Zhenwu, LIU Hua, LI Fengyou. Aspheric Surface Testing with CGH on Curved Surface [J]. Optical Precision Engineering,2004,12 (6): 555 - 559. (in Chinese)

[5] 解滨,肖志宏,余景池. 利用 Zernike 多项式分析超薄镜热变形[J]. 光学精密工程,2007,15(2):173 - 179.
XIE Bin, XIAO Zhihong, YU Jingchi. Analyzing Thermal Deformation of Ultra - thin Mirror Using Zernike Polynomials[J]. Optics and Precision Engineering, 2007, 15 (2): 173 - 179. (in Chinese)

[6] 莫卫东,冯金富. 数字化玻璃表面检测系统的研究[J]. 光子学报,2001, 29(9):618 - 623.
MO Weidong,FENG Jinfu. Reserch of A System to Inspect Surface of Optical Plane Glass with Quantizing Technique [J]. Acta Photonica Sinica,2001, 29(9):618 - 623. (in Chinese)

[7] 莫卫东,高伯龙. 数字化技术在玻璃表面检测系统中的应用[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2000,1(5):1 - 4.
MO Weidong,GAO Bolong. Application of Quantizing Technique in the System to Inspect Surface of Optical Glass [J]. Journal of Air Force Engineering University:Natural Science Edition, 2000,1(5):1 - 4. (in Chinese)

[8] 莫卫东. 数字平面检测系统误差和精度评价方法的研究[J]. 光学学报, 2003,23(7):879 - 883.
MO Weidong. Research on Error and Precision of the System to Inspect Surface of Optical Plane[J]. Acta Optical Sinica, 2003,23(7):879 - 883. (in Chinese)

[9] 莫卫东. 光学干涉波面数字化处理方法与应用[J]. 计算物理,2003,20(6):514 - 520.
MO Weidong. Application and Methods to Fit Optical Interference Wave Surface with Quantizing Technique [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2003,20(6):514 - 520. (in Chinese)

[10] 余景池. 由干涉图计算波差和传递函数[J]. 光学学报,1984,4(9):814 - 820.
YU Jingchi. Calculation of Wavefront Error and OTF from Interferogram [J]. Acta Optical Sinica,1984,4(9):814 - 820. (in Chinese)

[11] 鄢静舟,孙厚环,高志强,等. 用 Zernike 多项式进行波面拟合的一种新算法[J]. 数学物理学报,2000,20 (3):378 - 385.
YAN Jingzhou, SUN Houhuan, GAO Zhiqiang,et al. A New Algorithm for Wavefront Fitting Using Zernike Polynomial [J]. Acta Mathematica Scientia, 2000,20 (3):378 - 385. (in Chinese)

(编辑:徐敏)

The Research on Equivalence of the Algorithms in Fitting Interference Wave Surface with Zernike Polynomials

MO Wei – dong, FAN Qi, ZHANG Hai – fang, FENG Ming – de, YANG Bai – yu, JIA Jin – chao
(Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: Through strictly proving the equivalence of the least squares method and Gram – Schimdt algorithm in fitting interference wave – front with Zernike polynomials, it is demonstrated that all algorithms of solving Zernike polynomial coefficients in the solving process are the same in stability. That is, when one of these algorithms is interrupted or a mutation appears in fitted interference wave – front in the solving process, then it is also not possible for the other algorithms to fit interference wave – front correctly. The research results show that no algorithm is superior to other algorithms in fitting the interference wave surface with Zernike polynomials. All these algorithms are equivalent in reliability except that their fitting processes are different.

Key words: Zernike polynomials; interference wave surface; least square method; Gram – Schimdt algorithm; algorithm equivalence

(上接第 89 页)

General Expressions of Constitutive Tensors of Irregular Prism Cloaks

GU Chao[1], QU Shao – bo[1,2], PEI Zhi – bin[1], XU Zhuo[2], LIU Jia[1], GU Wei[3]
(1. Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. Electronic Materials Research Laboratory, Key Laboratory of the Ministry of Education, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. Engineering & Technical College, Chengdu University of Technology, Leshan 614300, Sichuan, China)

Abstract: Based on the coordinate transformation theory, the condition for irregular prism cloaks is deduced and the tensor expressions of electromagnetic parameters are obtained. By using the deduced tensor expressions of electromagnetic parameters, the effects of 3 – sided, 4 – sided and 6 – sided prism cloaks are verified through full – wave simulations. The results confirm the validity of the tensor expressions of electromagnetic parameters obtained. The cloaks designed by using the deduced expressions can surely make the electromagnetic wave transmit around the inner object and resume its primary transmission direction. The work done in this paper provided a theoretical basis for the design of two – dimensional baroque cloak.

Key words: coordinate transformation theory; irregular prism cloak; tensor expression; full – wave simulation