

# 三维纯方位目标跟踪的可观测性需求分析

孙亮<sup>1,2</sup>, 徐安<sup>1</sup>, 曲大鹏<sup>1</sup>, 张涛<sup>1</sup>, 杨洋<sup>3</sup>

(1. 空军第二飞行学院, 陕西 户县 710306; 2. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038; 3. 西安陆军学院, 陕西 西安 710108)

**摘要:**在三维环境下,分别研究了匀速直线运动目标、匀加速运动目标及一阶延迟目标加速模型的可观测需求。构造了伪测量方程,应用线性系统理论可观测的 Gramian 判据,避免了复杂的非线性微分方程求解,并且可以处理更为一般的目标机动情况,而不局限于  $N$  阶目标动态模型。通过可观测充分必要条件的分析表明,一些类型的观测器机动不满足可观测条件;对于一阶延迟目标加速模型,观测器加速度阶次不必高于目标加速度阶次,这与以前的研究结论是不同的,文中所采用的方法对一般的纯方位测量问题也是有效的。

**关键词:**可观测;纯方位跟踪;伪测量

**DOI:**10.3969/j.issn.1009-3516.2010.03.008

**中图分类号:** TN953 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2010)03-0035-05

纯方位目标跟踪主要有2个任务,一是试图保持目标在视场范围内(如光电雷达的视场限制范围);二是得到目标状态量的准确估计。在海洋环境、空中战场以及被动寻的导弹导引中,纯方位目标跟踪进行了广泛的研究<sup>[1-4]</sup>。研究表明,该系统的可观测性是实现纯方位目标跟踪的前提。

系统的可观测性主要依赖2个方面因素:一是目标与观测器之间相对位置几何关系<sup>[3]</sup>;二是本机的机动方式。一些类型的本机机动动作不能确保系统的可观测性,并且还会导致跟踪滤波器的发散<sup>[4]</sup>。文献[5-6]采用了繁琐的代数方法推导了系统可观测性的充分必要条件;文献[7]推导了更一般的可观测性准则。在被动寻的导引应用中,文献[8-9]采用启发式思路以提高目标的可观测性。文献[10]通过引入  $N$  阶目标动态模型建立了可观测性准则,目标位置向量可以描述为时间的  $N$  阶多项式。采用的方法需要观测器位置向量相对目标位置向量的阶次更高。另外,文献[10]的研究表明,文献[5-6]中的可观测性条件仅是必要而非充分的,对于目标加速的 Singer 模型及其改进模型,或者通常采用的动态延迟加速指令产生的目标加速运动,目标的位置不能表达为  $N$  阶多项式,因此文献[10]中的结论不能直接采用。

本文通过对原始量测构造伪测量,并对伪线性形式进行研究,分别得到了匀速直线运动、匀加速直线运动、一阶延迟目标加速模型可观测的充分必要条件。

## 1 目标匀速(CV)模型及其可观测性分析

三维可观测算法同二维可观测需求是相互对应的,所不同的是,在一定条件下,三维非机动的观测器仍然可以得到目标跟踪的唯一解。

载机与目标运动的几何关系见图1。

在笛卡儿坐标系下,系统状态向量由目标相对观测器的位置向量  $r$ 、速度向量  $V$  所组成,表示为  $x = [X,$

收稿日期:2008-10-16

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60674031)

作者简介:孙亮(1982-),男,安徽萧县人,讲师,博士,主要从事航空火力控制总体与设计无源定位研究。

E-mail:sunliang1218@163.com

$Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}]^T$ 。

状态方程为:

$$\dot{x} = Ax + BA_m \quad (1)$$

式中:  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & I_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$ ,  $I_3$  为  $3 \times 3$  的单位阵;  $B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ -I_3 \end{bmatrix}$ ,

$\mathbf{0}_3$  为  $3 \times 3$  的零阵;  $A_m = (A_{mX}, A_{mY}, A_{mZ})^T$  为观测器的加速度向量。

观测方程由方位角、俯仰角量测组成, 由于只考察系统的可观测性, 观测方程的噪声可以不计<sup>[4]</sup>, 可表示为相对位置量的非线性函数:

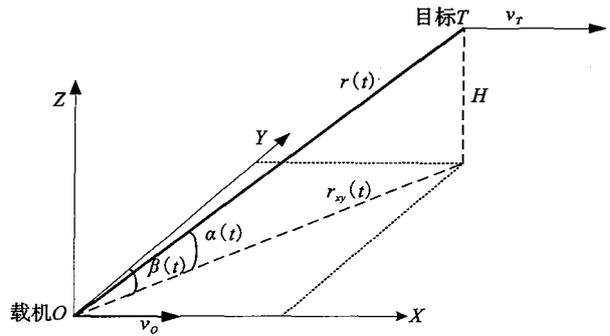


图1 载机和目标的几何运动关系图

Fig. 1 Geometry relation between flight and target

$$\begin{cases} \beta(t) = \arctan \frac{X(t)}{Y(t)} \\ \alpha(t) = \arctan \frac{Z(t)}{\sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}} \end{cases} \quad (2)$$

通过直接代数操作,  $X = r \cos \alpha \sin \beta$ ,  $Y = r \cos \alpha \cos \beta$ ,  $Z = r \sin \alpha$ , 可以构造如下的伪测量方程<sup>[6]</sup>:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \beta \cot \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\cos \beta \cot \alpha & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x = Hx \quad (3)$$

对于系统(1)、(3), 由线性系统理论中可观测的判据, 得到可观测的充分必要条件为:

$$\det[C^T C] \neq 0 \quad (4)$$

式中:

$$C = [C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5]^T = [H \ C_0 + C_0 A \ C_1 + C_1 A \ C_2 + C_2 A \ C_3 + C_3 A \ C_4 + C_4 A]^T \quad (5)$$

采用连续可微线性系统, 并作变量替换, 采用文献[6]的步骤, 可得到充分必要条件的简明数学表达式, 对于任意标量函数  $\alpha$ , 有:

$$\int_{t_0}^t (t - \mu) A_m(\mu) d\mu \neq \alpha(t) [r(t_0) + (t - t_0)v(t_0)] \quad (6)$$

式(6)的物理解释如下: 若  $\alpha = 0$ , 表明系统的可观测性将视观测器的机动而定; 若  $\alpha \neq 0$ , 即使  $A_m \neq 0$ , 也未必会满足由式(6)所限制的观测器轨迹, 由此可见, 一些类型的观测器机动是不满足可观测条件的。如沿着匀速直线运动轨迹与目标运动之间的瞬时方位线机动的观测器轨迹, 见图2, 其方位角因不能同非机动的观测器运动产生的方位角相区分, 所以需要排除。

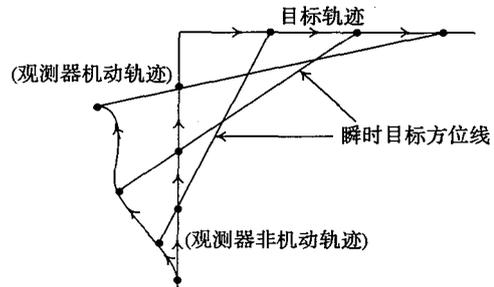


图2 不同观测器轨迹对应相同的观测

Fig. 2 Different observer courses correspond to identical observation

## 2 目标恒加速(CA)模型及其可观测性分析

在笛卡儿坐标系下, 系统状态向量由目标相对观测器的位置向量  $r$ 、速度向量  $V$ 、加速度向量  $A_T$  所组成, 表示为  $x = [X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, A_{TX}, A_{TY}, A_{TZ}]^T$ , 系统状态方程形式同式(1), 表示如下:

$$\dot{x} = Ax + BA_m \quad (7)$$

式中:  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & I_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & I_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ -I_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$ ;  $A_m = (A_{mX}, A_{mY}, A_{mZ})^T$  为观测器的加速度向量。测量方程同式(2), 伪测量方程如式(3), 假定式(3)中  $\alpha \neq 0$ , 下面考察由式(3)、式(7)构成的动态系统, 进一步, 式(3)中的状态向量  $x$  由式(7)可以写为:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BA_m(\tau) d\tau \quad (8)$$

状态转移矩阵  $\Phi$  满足:

$$\Phi(t - t_0) = \begin{bmatrix} I_3 & \Delta t I_3 & \frac{\Delta t^2 I_3}{2} \\ 0 & I_3 & \Delta t I_3 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $\Delta t = t - t_0$ , 由此, 式(3) 可重构为:

$$H(t)\Phi(t - t_0)x(t_0) = -H(t)\int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)BA_m(\tau) d\tau \quad (10)$$

式(10) 的右端各个量均是已知的。由线性系统理论可观测的判据可知, 系统(3)、(7) 在  $t_0$  可观测当且仅当可观测 Gramian 矩阵在时间段  $(t_0, t_f]$  上对有限的  $t_1$  是非奇异的,  $t_f$  为末时刻, Gramian 矩阵定义为:

$$G(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{H}^T(t, t_0)\tilde{H}(t, t_0) dt \quad (11)$$

$\tilde{H}(t, t_0)$  定义为:

$$\tilde{H}(t, t_0) = H(t)\Phi(t - t_0) \quad (12)$$

已知  $G(t_1, t_0)$  的非奇异等价于  $\tilde{H}(t, t_0)$  的各列在  $(t_0, t_f]$  上是线性无关的,  $t_0$  时刻定义在  $[t_0, t_f]$  上的系统是可观的当且仅当存在  $t_1 \in (t_0, t_f]$  满足  $\tilde{H}(t, t_0)$  的各列在  $(t_0, t_1]$  上是线性无关的。由此, 可得系统在  $t_0$  时刻是可观的, 当且仅当对任意  $9 \times 1$  的非零常向量  $\mu$ , 存在  $t \in (t_0, t_f]$ , 使得:

$$\tilde{H}(t, t_0)\mu \neq 0 \quad (13)$$

非零常向量  $\mu$  可表示为:

$$\mu = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}, a_{33})^T \quad (14)$$

式中  $a_{ij}$  为非全零的任意常量。把式(3)、(9)、(14) 分别代入条件(13), 存在  $t \in (t_0, t_f]$ , 使得:

$$\begin{bmatrix} \left( a_{11} + a_{12}\Delta t + a_{13}\frac{\Delta t^2}{2} \right) - \sin\beta(t)\cot\alpha(t) \left( a_{31} + a_{32}\Delta t + a_{33}\frac{\Delta t^2}{2} \right) \\ \left( a_{21} + a_{22}\Delta t + a_{23}\frac{\Delta t^2}{2} \right) - \cos\beta(t)\cot\alpha(t) \left( a_{31} + a_{32}\Delta t + a_{33}\frac{\Delta t^2}{2} \right) \end{bmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

又  $\sin\beta\cot\alpha = \frac{X}{Z}$ ,  $\cos\beta\cot\alpha = \frac{Y}{Z}$ , 式(15) 可写为:

$$r(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} \neq k(t) \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}\Delta t + a_{13}\frac{\Delta t^2}{2} \\ a_{21} + a_{22}\Delta t + a_{23}\frac{\Delta t^2}{2} \\ a_{31} + a_{32}\Delta t + a_{33}\frac{\Delta t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中  $k(t)$  为任意标量函数, 由式(13) 可见式(16) 为可观的充分必要条件。从式(16) 可得, 对于恒定的  $\alpha$  和  $\beta$ , 系统是不可观测的。又相对位置向量  $r(t)$  可表示为:

$$r(t) = r(t_0) + V(t_0)\Delta t + A_T \frac{\Delta t^2}{2} - \int_{t_0}^t (t - \sigma)A_m(\sigma) d\sigma \quad (17)$$

联立式(16)、(17) 得:

$$\int_{t_0}^t (t - \sigma)A_m(\sigma) d\sigma \neq f(t) \left( r(t_0) + V(t_0)\Delta t + A_T \frac{\Delta t^2}{2} \right) \quad (18)$$

式中  $f(t)$  为任意标量函数。

### 3 一阶延迟目标加速运动

本节把对目标的可观测性分析扩展到了一阶延迟目标加速运动, 目标加速度  $A_T$  表示为:

$$\dot{\mathbf{A}}_T = -\lambda \mathbf{A}_T + \lambda \mathbf{U}_T \quad (19)$$

式中,  $\mathbf{U}_T = (U_{Tx}, U_{Ty}, U_{Tz})^T$  为恒定的目标加速度指令; 时间常量  $\frac{1}{\lambda}$  定义了加速度增加的快速性。由于  $\mathbf{U}_T$  是未知的, 则需要估计的状态变量  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{V}, \mathbf{A}_T, \mathbf{U}_T)^T$ 。系统的状态模型和测量模型同上述匀加速运动目标, 对式(13)进行代数操作, 可得到可观测的充分必要条件如下, 对应式(13)中的  $\mu$  为  $12 \times 1$  的任意非零常量。

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = k(t) \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}\Delta t + a_{13}\phi_{13}(\Delta t) + a_{14}\phi_{14}(\Delta t) \\ a_{21} + a_{22}\Delta t + a_{23}\phi_{13}(\Delta t) + a_{24}\phi_{14}(\Delta t) \\ a_{31} + a_{32}\Delta t + a_{33}\phi_{13}(\Delta t) + a_{34}\phi_{14}(\Delta t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

式中:  $k(t)$  为任意标量函数;  $a_{ij}$  为非全零的任意常量;  $\phi_{13}(\Delta t) = \frac{1}{\lambda^2(-1 + \lambda\Delta t + \exp(-\lambda\Delta t))}$ ;  $\phi_{14}(\Delta t) = \frac{\Delta t^2}{2} - \phi_{13}(\Delta t)$ ;  $\Delta t = t - t_0$ 。

相对位置向量  $\mathbf{r}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))^T$  可表示为:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{V}(t_0)\Delta t + \mathbf{A}_T(t_0)\phi_{13}(\Delta t) + \mathbf{U}_T\phi_{14}(\Delta t) - \int_{t_0}^t (t - \sigma)\mathbf{A}_m(\sigma)d\sigma \quad (21)$$

若  $\mathbf{A}_m$  满足:

$$\int_{t_0}^t (t - \sigma)\mathbf{A}_m(\sigma)d\sigma = f_1(t) [\mathbf{r}(t_0) + \mathbf{V}(t_0)\Delta t + \mathbf{A}_T(t_0)\phi_{13}(\Delta t) + \mathbf{U}_T\phi_{14}(\Delta t)] \quad (22)$$

或者:

$$\int_{t_0}^t (t - \sigma)(\mathbf{A}_m(\sigma) - \mathbf{A}_T(\sigma))d\sigma = f_2(t) [\mathbf{r}(t_0) + \mathbf{V}(t_0)\Delta t] \quad (23)$$

则式(20)将不满足, 对应系统不可观测, 这里  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  为任意的标量函数。这是由于式(22)中包含了  $\mathbf{A}_m = 0$ , 式(23)包含了  $\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_T$ , 即观测器同目标的相同机动, 所以该系统是不可观测的。若  $\mathbf{A}_m$  固定不变, 由式(20)中  $\phi_{14}(\Delta t)$  和  $\phi_{13}(\Delta t)$  的关系, 可得系统是不可观测的。

若动态量  $\mathbf{A}_m$  表示为恒定加速度指令为  $\mathbf{U}_m$ 、时间常量同式(19)的一阶延迟模型:

$$\dot{\mathbf{A}}_m = -\gamma \mathbf{A}_m + \gamma \mathbf{U}_m \quad (24)$$

式中  $\gamma = \lambda$ 。假设加速度指令  $\mathbf{U}_m$  在  $t_0$  时刻开始接受, 则式(21)中的相对位置向量  $\mathbf{r}(t)$  在上述情况可按下式计算:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{V}(t_0)\Delta t + (\mathbf{A}_T(t_0) - \mathbf{A}_m(t_0))\phi_{13}(\Delta t) + (\mathbf{U}_T - \mathbf{U}_m)\phi_{14}(\Delta t) \quad (25)$$

此时, 由于不满足式(20), 系统仍然是不可观测的。不同的是, 若观测器的机动时间常数不同于目标, 即在式(24)中有  $\gamma \neq \lambda$ , 则系统是可观的。这一结论表明: 动态量  $\mathbf{A}_m$  不必要包含比  $\mathbf{A}_T$  高的时间微分阶数, 这与文献[3]的结论是不同的。文献[3]的前提是对于  $N$  阶动态目标的可观测, 观测器的机动至少要  $N + 1$  阶。

本节的结论可以方便地应用于随机环境中目标加速度为 Singer 模型及其改进形式等, 采用与可观测 Gramian 矩阵相似的 Fisher 信息矩阵, 在本文的确定性环境下也可以得到相同的结论。

## 4 结束语

文中采用了一种新的方法得到了纯方位目标跟踪可观测的充分必要条件, 该方法简单且不需要对非线性方程求解, 同时不局限于  $N$  阶动态目标, 该方法可以比较容易地扩展到更高阶次的目标加速情况。一阶延迟目标加速情况表明动态量  $\mathbf{A}_m$  不必要包含更高的时间微分阶数, 因此可以处理更一般的纯方位测量问题。本文所采用的研究方法可应用于一般的目标运动情况。

### 参考文献:

- [1] Song T L. Observability of Target Tracking with Bearing - only Measurements [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1996, 41(4): 1468 - 1472.

- [2] Petridis V. A Method for Bearing – only Velocity and Position Estimation [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1981,26(2):488 – 493.
- [3] Ferdowski M H. Observability Conditions for Target States with Bearing – only Measurements in Three – dimensional Case[C]// International Conference on Control Applications. [S. l]:IEEE Press,2006:1444 – 1449.
- [4] Krohamn T R. Bearings – only Target Motion Analysis Based on A Multi – hypothesis Kalman Filter and Adaptive Ownship Motion Control[J]. IEE Proc Radar Sonar Navigation, 1998, 54(4):247 – 252.
- [5] Nardone S C, Aidala V J. Observability Criteria for Bearings – only Target Motion Analysis [J]. IEEE Transaction On Aerospace and Electronic Systems, 1981,17(2):162 – 166.
- [6] Hammel S E, Aidala V J. Observability Requirement for Three – dimensional Tracking via Angle Measurements [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1985,21(2):200 – 207.
- [7] Payne A N. Obserbability Problem for Bearings – only Tracking [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1989,34(3):761 – 768.
- [8] Hull D G, Speyer J L, Tseng C Y. Maximum Information Guidance for Homing Missiles [J]. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 1985,8(4):494 – 497.
- [9] Song T L, Speyer J L. A Stochastic Analysis of A Modified Gain Extended Kalman Filter with Applications to Estimation with Bearings – only Measurements [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1985,30(10):940 – 949.
- [10] Fogel E, Gavish M. Nth Dynamics Target Ebservability from Angle Measurements [J]. IEEE Transaction on Aerospace and E-lectronic Systems, 1988,24(4):305 – 308.

(编辑:田新华)

## Analysis of the Observability Requirement of Three – Dimensional Bearings – Only Target Tracking

SUN Liang<sup>1,2</sup>, XU An<sup>1</sup>, QU Da – peng<sup>1</sup>, ZHANG Tao<sup>1</sup>, YANG Yang<sup>3</sup>

(1. The Second Aviation College of Air Force, Huxian 710306, Shaanxi, China; 2. Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, 710038, China; 3. Xi'an Army College, Xi'an 710108, China)

**Abstract:** The problem of observability for bearings – only target tracking is discussed in this paper based on the target traveling in the three – dimensional space at a uniform velocity, constant acceleration and first – order lag acceleration. Pseudo measurement equations are constructed, Grammian criterion of linear system theory is used, and the problem of solving complex nonlinear differential equations is avoided, the method can be used to deal with the general situation, and is not restricted to Nth order target dynamics. The analysis of the necessary and sufficient conditions shows that some types of observer maneuver do not satisfy the condition, the maneuver order of observer is not necessarily higher than that of the target, this conclusion is different from the previous ones. The method adopted in the paper is also effective to the general bearings – only measuring problem.

**Key Words:** observability; bearings – only target tracking; pseudo measuring