

非线性航空压气机系统全局稳定域

姚 宏, 邓 涛, 张广军
(空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051)

摘 要:从理论上定性分析了非线性航空压气机系统的局部稳定性和全局稳定域,提出了以 β 、 γ 为参数的系统稳定性判据,获得了系统的全局稳定域。基于航空压气机系统的 MG 模型,应用非线性动力学理论,首先对系统有限远奇点进行定性分析,提出了在 β 、 γ 不同匹配条件下的稳定条件,且用数值仿真加以验证,即当 $\gamma = 1.2, \psi_{c0} = 1.5, \beta = 0.67$ 时为中心;当 $\gamma = 1.4, \psi_{c0} = 1.75, \beta = 1$ 时为焦点;当 $\gamma = 1.2, \psi_{c0} = 2.2, \beta = 2$ 时为结点。其次对系统无穷远奇点进行定性分析,划分了非线性航空压气机系统的全局稳定域。进一步分析了稳定性条件及全局稳定域与此系统喘振和旋转失速的关系。

关键词:航空压气机;稳定域;喘振;旋转失速;主动控制

中图分类号: V23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009 - 3516(2009)01 - 0001 - 04

喘振和旋转失速是轴流压气机复杂的三维非定常流动,而且影响因素很多。压气机一旦进入旋转失速或喘振状态,会导致压气机性能的急剧恶化,并造成压气机叶片振动断裂等严重故障,危及飞行安全。因此,应避免压气机进入这种不稳定工作状态,这对于压气机稳定控制具有重要意义。1986 年,Moore 和 Greitzer^[1]联合提出了描述压气机系统失速动态性能的旋转失速和喘振的统一非线性模型,即 Moore - Greitzer 模型,该模型是压气机稳定性分析的主要工具之一,后来,出现了改进 MG 模型^[2-4]。近年来,已有一些学者将非线性动力学理论用来分析此系统的动力学特性^[5-8],目前较多的工作集中在使用非线性分叉理论,对特定(参数确定)的 MG 模型进行分析并提出了一些相应的非线性控制法则,但对其局部稳定性、全局定性的稳定域与其喘振、旋转失速机理之间关系的研究甚少,到目前为止,几乎没有关于这方面的研究报告。

1 航空压气机系统的动力学模型

压气机的流动过程是连续变化的,考虑轴对称流动,特性方程取三次方时得到系统动力学方程为^[2]:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} = -\psi + \psi_{c0} + \frac{3}{2}\Phi - \frac{1}{2}\Phi^3 \\ \frac{d\psi}{dt} = (\Phi - \sqrt{\gamma\psi} + 1)/\beta^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: ψ_{c0} 是系统的关闭压头,与压气机的级数成正比; γ 是控制流量的参数; β 组合了系统的几何参数和 B 参数。 γ 和 ψ 皆为正参数,变量 ψ 的取值通常为正值。

2 航空压气机系统的定性行为

2.1 定义域内奇点

* 收稿日期:2008 - 09 - 19

基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2007014)

作者简介:姚宏(1963 -),女,吉林长春人,教授,博士(后),主要从事非线性动力学研究。

E-mail:37667 818@qq.com

这里用方程组来进行奇点分析:

$$\begin{cases} -\psi + \frac{3}{2}\Phi - \frac{1}{2}\Phi^3 + \psi_{c0} = 0 \\ (\Phi - \sqrt{\gamma\psi + 1})/\beta^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

方程组的根为系统(1)的奇点。用 Maple 软件画出两方程曲线相交图,见图 1。对于 $\psi > 0$ 内有物理意义部分 当 $\psi_{c0} = 1$ 时,两曲线在 $\Phi = -1$ 处相切,此时 $\psi = 0$,则在压气机轴对称流动工作时,系统(1)通常只有一个奇点。由于方程组的解含虚数没有物理意义,满足: $-27\gamma^3 + 108\gamma^2 - 72\gamma + 16 - 108\gamma^2\psi_{c0} + 72\gamma\psi_{c0} + 27\gamma^3\psi_{c0}^2 - 16\psi_{c0} \geq 0$,据此,得到图 2。I 区和 II 区是奇点不存在的区域。

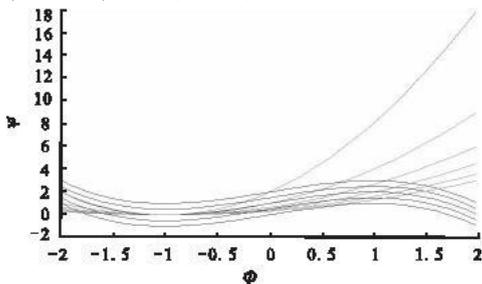


图 1 曲线相交图

Fig. 1 Illustration of intersecting

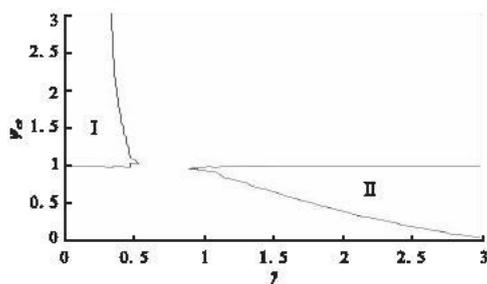


图 2 γ 与 ψ_{c0} 关系图

Fig. 2 The relation between γ and ψ_{c0}

2.2 稳定性判据

2.2.1 有限远奇点

在系统(1)有限远奇点 $Q(\varphi_0, \psi_0)$ 处线性化后得到系数矩阵的特征方程为:

$$\lambda^2 - \left(\frac{3}{2}(1 - \varphi_0^2) - \frac{\gamma}{2\beta^2(1 + \varphi_0)} \right) \lambda - \frac{3\gamma(1 - \varphi_0)}{4\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} = 0 \quad (3)$$

由图 2 可得到系统存在奇点时 γ 的取值范围。由图 1 可以看出的分布,因此 $3\gamma(1 - \varphi_0) - 4 < 0$,鞍点通常不太可能出现。对特征根分析如下:

- 1) 2 个特征根都为负,奇点为稳定结点,系统(1)在相平面上的轨线将没有振荡地直接收敛到失速奇点,这对应航空压气机的典型失速情形;
- 2) 2 个特征根都为正,奇点为不稳定结点,奇点邻域的轨线将发散到无穷远,见图 3;
- 3) 特征根为共轭复数且实部皆负,奇点为稳定焦点轨线盘旋收敛于奇点,见图 4
- 4) 特征根为两共轭复数,且实部皆正,奇点为不稳定焦点,轨线发散;
- 5) 特征根为纯虚数,参数在这种情况附近变化时,系统(1)轨线对应于多次的振荡过程见图 5。

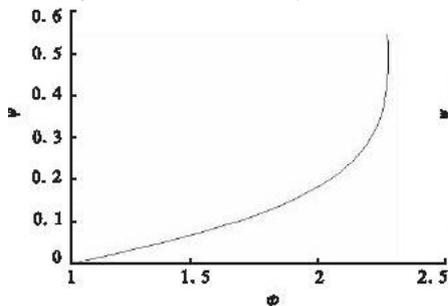


图 3 $\gamma = 1.4, \psi_{c0} = 2.2, \beta = 2$ 结点

Fig. 3 Singular point is node

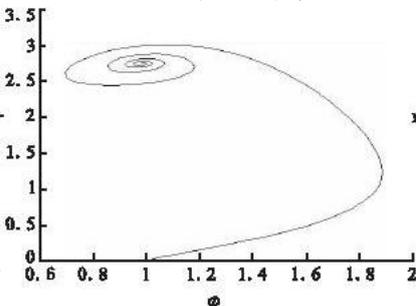


图 4 $\gamma = 1.4, \psi_{c0} = 1.75, \beta = 1$, 焦点

Fig. 4 Singular point is focus

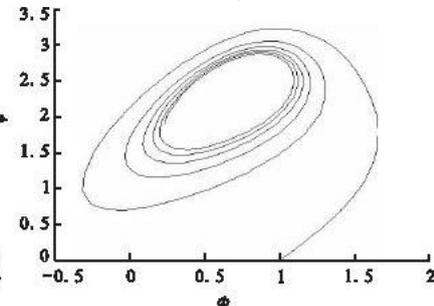


图 5 $\gamma = 1.2, \psi_{c0} = 1.5, \beta = 0.67$, 中心

Fig. 5 Singular point is center point

2.2.2 稳定性判据

航空压气机系统流动过程的局部稳定性判据及与旋转失速和喘振的关系为

- 1) 当特征根实部为负的共轭复数时,系统的轴对称流动是稳定的;
- 2) 当两个特征根都为负时,系统会出现典型的失速。随着参数 β, γ 的变化,其流动在没有振荡的情况下,局部趋于稳定;
- 3) 当特征根为纯虚数时,随着参数 β, γ 在情况附近变化,系统会对应于多次的振荡过程,不能保证

局部稳定,之后进入喘振状态;

4) 当 2 个特征值均为正或特征根实部为正的共轭复数,随着参数 β, γ 的变化,系统将失稳,进入喘振过程,而旋转失速平衡点保持局部稳定。

2.3 全局稳定域

作 Poincaré 变换: $u = \psi/\Phi, z = 1/\Phi, dt/z^2 = d\tau$, 系统(1)变为:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{u}{2} + \frac{z^2}{\beta^2} + \frac{z^3}{\beta^2} - \frac{\sqrt{\gamma}z^2\sqrt{uz}}{\beta^2} - \frac{3}{2}uz^2 - \psi_{,0}uz^3 + u^2z^2 \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{z}{2} - \frac{3}{2}z^3 + uz^3 - \psi_{,0}z^4 \end{cases} \quad (4)$$

求得系统(4)无穷远奇点为 $O(0,0)$ 。分离出式(4)的线性项,利用初等奇点的判定法,可得: $q_0 = 1/4, p_0 = 1 > 0, p_0^2 - 4q_0 = 0$ 。 O 为不稳定临界结点。

作 Poincaré 变换: $v = \Phi/\Psi, z = 1/\Psi, dt/z^2 = d\tau$, 系统(1)变为:

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = -z^2 - \frac{v^3}{2} + \frac{3}{2}vz^2 + \psi_{,0}z^3 + \frac{\sqrt{\gamma}}{\beta^2}vz^2\sqrt{z} - \frac{vz^3}{\beta^2} - \frac{v^2z^2}{\beta^2} \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{\sqrt{\gamma}z^3\sqrt{z}}{\beta^2} - \frac{vz^3}{\beta^2} - \frac{z^4}{\beta^2} \end{cases} \quad (5)$$

$D'(0,0)$ 是系统(5)的高阶奇点,其附近的轨线性态非常复杂,已不能简单地用初等的奇点类型来分析,需采用定性分析确定 D' 点附近的轨线分布。令 $v = r\cos\theta, z = r\sin\theta$, 系统(5)化为:

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = r^2(R(\theta) + o(1)) \\ \frac{d\theta}{d\tau} = r(G(\theta) + o(1)) \end{cases} \quad (6)$$

式中: $R(\theta) = -\cos\theta\sin^2\theta; G(\theta) = \sin\theta\cos^2\theta$ 。

显然 $G(\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内变号,令 $G(\theta) = 0$, 解得 $\theta_n = n\pi/2, n = 0, 1, 2, 3$ 。根据方程的解,可做出 4 个稳定域 $S_n = \{(\theta, r) | \theta_n - \delta \leq \theta \leq \theta_n + \delta, 0 \leq r \leq r_n\}$ 。在稳定域之外,轨线不能进入奇点 D' , 全局稳定域见图 6。

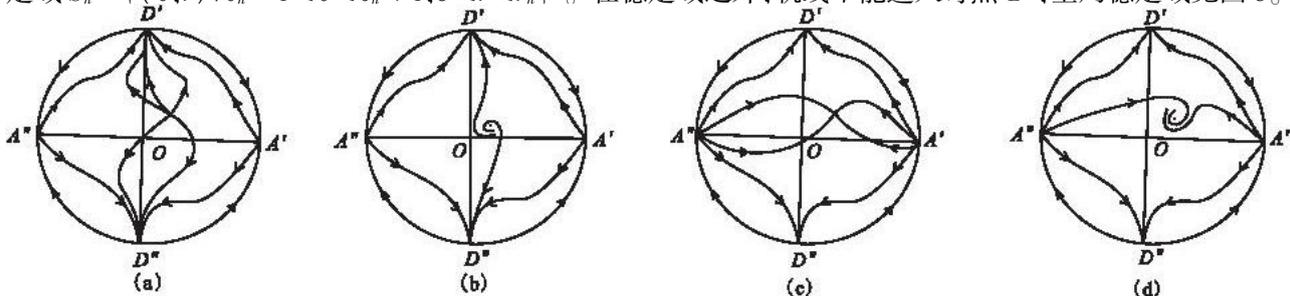


图 6 全局稳定域图

Fig. 6 Graphs qualitatively indicate the global stability

根据特征方向定义,判定 θ_1 和 θ_3 为方程(6)的特征方向。①当 θ 由小到大经过 θ_1 时, $R(\theta)G(\theta)$ 由负变正,在 θ_1 处存在稳定域内;②当 θ 由小到大经过 θ_3 时, $R(\theta)G(\theta)$ 由负变正,在 θ_3 处存在稳定域内。

3 结论

理论上,通过对非线性航空压气机系统局部稳定性(有限远奇点)及全局稳定域(无穷远奇点)定性的综合分析,得到以下结论:

1) 当 2 个特征根都为负时,此时相图对应稳定结点区域,系统在相平面上的轨线将没有振荡地直接收敛到失速奇点,见图 6(a), 系统(1)局部是稳定的,这对应着典型的压气机失速情形;

2) 当 2 个特征根都为正,此时相图对应不稳定结点区域,轨线不会收敛,在奇点附近的轨线将发散到无穷远,见图 6(b) 所示;随着参数 β, γ 的变化,系统将失稳,进入喘振过程,而旋转失速平衡点保持局部稳定;

3) 当特征根为两共轭复数,且实部皆负,此时相图对应稳定焦点区域,轨线盘旋收敛于奇点,见图 6(c),

系统保持全局稳定;

4) 当特征根为两共轭复数,且实部皆正,此时相图对应不稳定焦点区域,轨线不收敛,见图6(b),随着参数 β, γ 的变化,系统将失稳,进入喘振过程;

5) 当特征根为纯虚数,此时相图对应为中心区域,见图6(d),随着参数 β, γ 在这种情况下附近变化时压气机系统对应于多次的振荡过程,之后进入喘振状态。

由此可见,在参数 β, γ 的参数空间进行稳定域及稳定性分析,可以定性地划分系统的稳定域;可以通过改变系统在奇点的动力学行为,即改变参数 β, γ 匹配来实现旋转失速和喘振的控制。这对进一步了解系统参数对流动行为的影响及进行有效的主动控制具有一定的指导意义。

参考文献:

- [1] Moore F K, Greitzer E M. A Theory of Post-stall Transients in Axial Compression Systems, Part I & II[J]. ASME J of Engineering for Gas Turbines and Power, 1986, 108: 68-97.
- [2] McCaughan F E. Bifurcation Analysis of Axial Flow Compressor Stability[J]. SIAM J Appl Math, 1990, 50(5): 1232-1253.
- [3] Liaw D C, Abed E H. Active Control of Compressor Stall Inception: A Bifurcation-Theoretical Approach[J]. Automatica, 1996, 32: 109-116.
- [4] Wang H O, Adomatis R A, Abed E H. Nonlinear Analysis and Control of Rotating Stall in Axial Flow Compressor[J]. IEEE, 1994, 2(29): 2317-2321.
- [5] McCaughan F E. Application of Bifurcation Theory to Axial Flow Compressor Instability [J] Journal of Turbo Machinery, 1989, 111: 426-433.
- [6] Leonessa A, Chellaboina V, Haddad W M. Globally Stabilizing Controllers for Multi-mode Axial Flow Compressors via Equilibrium-dependent Lyapunov Functions [J]. IEEE, 1997, 2: 993-997.
- [7] Chen G R, Moiola J L, Wang H O. Bifurcation Control: Theories, Methods and Application [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10(3): 511-548.
- [8] Hos C, Champneys A, Kullmann L. Bifurcation Analysis of Surge and Rotating Stall in the MG Compressor System[J]. IMA J App Math, 2003, 68(2): 205-228.
- [9] Suder K L, Hathway M D, Thorp S A. Compressor Stability Enhancement Using Discrete Tip Injection [J]. Transaction of ASME, 2001, (123): 14-23.
- [10] 邹毅, 姚宏. 飞机大攻角俯仰飞行的稳定域研究[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2006, 7(4): 11-14.
ZOU Yi, YAO Hong. Analysis on the Stable Region for the Pitching Flight at High Attack Angle of Aircraft [J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2006, 7(4): 11-14. (in Chinese)

(编辑: 姚树峰, 徐敏)

Global Stable Region Analysis to Nonlinear Axial Flow Compressor

YAO Hong, DENG Tao, ZHANG Guang-jun

(Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: Global stable region and stability of nonlinear axial compressor system are theoretically qualitatively analyzed in this paper, Criterion of stability of the system are presented by parameters. Based on the MG model of the nonlinear axial flow compressor systems and by applying the nonlinear dynamical theory, qualitative dynamical characters are analyzed for the limited singular point firstly. The stable conditions are achieved on the basis of the various matching of parameters. Simulation results prove that when $\gamma = 1.2, \psi_{c0} = 1.5, \beta = 0.67$ singular point is center point; when $\gamma = 1.4, \psi_{c0} = 1.75, \beta = 1$ singular point is focus; when $\gamma = 1.2, \psi_{c0} = 2.2, \beta = 2$ singular point is node. Secondly, qualitative dynamical characters are analyzed for the unlimited singular point, the global stable region can be divided by the nonlinear axial flow compressor systems. In addition, the relation are researched between the stable conditions, global stable region and rotating stalls as well as surge. It has academic significance on achieving reliable active control of the nonlinear axial flow compressor and understanding the relations between the system's behaviors and the parameters.

Key words: axial flow compressor; stable region; surge; rotating stall; active control