第9卷第3期 空军工程大学学报(自然科学版) Vol.9 No.3
2008年6月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Jun.2008

Pawlak 粗糙集的若干重要性质

周 炜， 雷英杰
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要:为了更深入地了解任意论域(不仅仅是有限论域)上的粗糙集理论,首先从任意论域上的等价关系 R 出发,提出了 R 粗糙集和 R 精细集的定义,该定义与集合的上、下近似无关。在此基础上研究了 R 精细集的性质,提出并证明了任意论域上 R 精细集的判定定理和运算封闭性定理。然后,讨论了上、下 R 近似的性质,提出并证明了上、下 R 近似的表示定理、比较定理和拓扑结构定理。最后研究了知识库的相关性,给出了正域表示定理和知识库相关性判定定理。这些结果在一定程度上丰富了 Pawlak 粗糙集理论。

关键词:粗糙集; 表示定理; 拓扑结构; 判定定理
中图分类号: TP182 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2008)03-0076-03

Pawlak 粗糙集理论最大限度地克服了模糊集合论中隶属函数的主观性,人们在理论和应用两个方面的研究上做了大量工作[1-8],证明了它具有广阔的应用前景和生命力。本文就精细集判定定理和运算封闭性定理、上下近似的表示定理、比较定理和拓扑结构定理、知识库的相关性判定定理以及正域的表示定理等方面进行了研究。

1 关于精细集

定义1 设 R 为 U 上的一个等价关系,$X\subseteq U$ 。如果存在 $Y\subseteq U$ 使 $X=\cup_{y\in Y}[y]_R$,则称 X 为 R 精细集(或称 X 为 R 可定义的),否则称 X 为 R 粗糙集。

定理1(精细集判定定理) 设 R 为 U 上的一个等价关系,则:① 对任意的 $X\subseteq U$,成立 $X\subseteq\cup_{x\in X}[x]_R$;②$X\subseteq U$ 为 R 精细集 iff $X\supseteq\cup_{x\in X}[x]_R$, iff 对所有的 $x\in X$ 成立 $[x]_R\subseteq X$;③$x\subseteq U$ 为 R 精细集 iff $X=\cup_{x\in X}[x]_R$,iff 存在 $Y\subseteq X$ 使得 $X=\cup_{y\in Y}[y]_R$。

证明 只证②。设 $X\subseteq U$ 为 R 精细集,则存在 $Y\subseteq U$ 使 $X=\cup_{z\in Y}[z]_R$。显然 $Y\subseteq X$ 。对于任意的 $x\in X$,存在 $y\in Y$,使 $x\in[y]_R$。于是 $[x]_R=[y]_R\in\cup_{z\in Y}[z]_R=X$ 。从而也有 $\cup_{x\in X}[x]_R\subseteq X$ 。这就证明了必要性。下面证明充分性。如果对于所有的 $x\in X$ 成立 $[x]_R\subseteq X$,则 $\cup_{x\in X}[x]_R\subseteq X$ 。应用本定理的结论①得 $X=\cup_{x\in X}[x]_R$,从而由定义1知 X 是 R 精细集。证毕。

定理2(精细集运算的封闭性) 设 R 为 U 上的一个等价关系,则:①任意一个 R 精细集 X 的补集 $X=U-X$ 是 R 精细集;②任意一族 R 精细集的并是 R 精细集;③任意一族 R 精细集的交是 R 精细集。

2 关于粗糙集的上、下近似

定义2 设 R 为 U 上的一个等价关系,$X\subseteq U$ 。定义 X 的下 R 近似如下[1-7,9]:

$$R_*(X)=\{x\mid(x\in X)\wedge([x]_R\subseteq X)\}=\cup\{Y\mid(Y\in U/R)\wedge(Y\subseteq X)\}$$

收稿日期:2007-03-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60773209);陕西省自然科学基金资助项目(2006F18)
作者简介:周 炜(1962-),男,陕西凤翔人,副教授,主要从事智能信息处理研究;E-mail:phoenixshaanxi@163.com
雷英杰(1956-),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,主要从事智能信息处理与智能系统、智能决策等研究.

对于等价关系族 Ω,定义 $\Omega_*(X)=\mathrm{ind}(\Omega)_*(X)$ 。

定义3　设 R 为 U 上的一个等价关系,$X\subseteq U$ 。定义 X 的上 R 近似如下[1-7]:

$$R^*(X)=\{x\mid(x\in U)\wedge([x]_R\cap X\neq\varnothing)\}=\cup\{Y\mid(U\in U/R)\wedge(Y\cap X\neq\varnothing)\}$$

对于等价关系族 Ω,定义 $\Omega^*(X)=\mathrm{ind}(\Omega)^*(X)$ 。

定理3　(上下近似表示定理)　$R_*(X)=\cup_{x\in X\wedge[x]_R\subseteq X}[X]_R$,$R^*(X)=\cup_{x\in X}[x]_R$。

证明　只证 $R^*(X)=\cup_{x\in X}[x]_R$。一方面,对于任意的 $x\in R^*(X)$,由定义3知 $[x]_R\cap X\neq\varnothing$。设 $y\in[x]_R\cap X$ 。因 $y\in[x]_R$,有 $[x]_R=[y]_R$。又因 $y\in X$,有 $[x]_R=[y]_R\subseteq\cup_{z\in Z}[z]_R$。所以 $x\in\cup_{z\in X}[z]_R$,从而由 x 的任意性知 $R^*(X)\subseteq\cup_{z\in X}[z]_R$。另一方面,对于任意的 $x\in\cup_{z\in X}[z]_R$,存在 $y\in X$,使 $x\in[y]_R$。显然 $y\in[y]_R\cap X$ 。于是由 $[x]_R=[y]_R\cap X=[y]_R\cap X\neq\varnothing$ 和定义3知 $x\in R^*(X)$,从而由 x 的任意性知 $\cup_{z\in X}[z]_R\subseteq R^*(X)$ 。证毕。

定理4　(粗糙近似的比较定理)$P\subseteq Q$ 若,则每一个 Q 精细集必然也是 P 精细集,且对于任意的 $X\subseteq U$,有 $Q_*(X)\subseteq P_*(X)\subseteq X\subseteq P^*(X)\subseteq Q^*(X)$。

定理5(上下近似的拓扑结构定理)　设 R 是论域 U 上的等价关系。①$R^*(X)$是包含 X 的最小 R 精细集,即包含 X 的所有 R 精细集之交;②$R_*(X)$ 是含于 X 的最大 R 精细集,即含于 X 的所有 R 精细集之并。

证明　①设 Λ 是包含 X 的所有 R 精细集的族,现证明 $R^*(X)=\cap_{Y\in\Lambda}Y$ 。首先由定理2知 $\cap_{Y\in\Lambda}Y$ 是 R 精细集。其次,一方面由于 $R^*(X)$是包含 X 的 R 精细集,所以 $R^*(X)\in\Lambda$,从而 $\cap_{Y\in\Lambda}Y\subseteq R^*(X)$ 。另一方面对于任意的 $x\in X$ 和任意的 $Y\in\Lambda$,由于 $X\subseteq Y$ 有 $x\in Y$,又由于 Y 是 R 精细集,根据定理1得 $[x]_R\subseteq Y$,再由定理3得 $R^*(X)=\cup_{z\in X}[z]_R\subseteq Y$,最后由 Y 的任意性知 $R^*(X)\subseteq\cap_{Y\in\Lambda}Y$ 。这就证明了 $R^*(x)=\cap_{Y\in\Lambda}Y$。②再设 Λ 是含于 X 的所有 R 精细集的族,来证明 $R_*(X)=\cup_{Y\in\Lambda}Y$。首先由定理2知 $\cup_{Y\in\Lambda}Y$ 是 R 精细集。其次,一方面由于 $R_*(X)$是含于 X 的 R 精细集,所以 $R_*(X)\in\Lambda$,从而 $R_*(X)\subseteq\cup_{Y\in\Lambda}Y$ 。另一方面,对于任意的 $Y\in\Lambda$ 和任意的 $y\in Y$,由于 Y 是含于 X 的 R 精细集,所以根据定理1有 $[y]_R\subseteq Y\subseteq X$,再根据定理1的③和定理3得 $Y=\cup_{y\in Y}[y]_R\subseteq\cup_{x\in X\wedge[x]_R\subseteq X}[x]_R=R_*(X)$,最后由 Y 的任意性知 $\cup_{Y\in\Lambda}Y\subseteq R_*(X)$ 。这就证明了 $R_*(X)=\cup_{Y\in\Lambda}Y$ 。定理5证毕。

推论1 若 $A\subseteq U$ 是 R 精细集,则对任意 $X\subseteq U$,成立 $R_*(A\cup X)=A\cup R_*(X)$,$R_*(A\cap X)=A\cap R_*(X)$ 。

3　知识库的相关性判定和正域的表示

定义4　设 U 是一个有限或无限论域, $K=(U,\Omega)$是 U 上的一个知识库(这里 Ω 是 U 上的一族等价关系)。若 Π 是 Ω 的一个非空子族,则称 $\mathrm{ind}(\Pi)=\cap_{R\in\Pi}R$ 为 Π 的难区分关系(indiscernible relation),并把等价类集合 $U/\mathrm{ind}(\Pi)$ 简记作 U/Π[1-7,10]。

定义5　设 Ω 是 U 上的一族等价关系,且 $R\in\Omega$ 。若 $\mathrm{ind}(\Omega)=\mathrm{ind}(\Omega-\{R\})$,则称关系 R 在族 Ω 之中是可省的(dispensable),否则称关系 R 在族 Ω 之中是不可省的。若族 Ω 中的每个关系 R 都是不可省的,则称族 Ω 是独立的(independent),否则就称族 Ω 是相关的[1-7]。

定理6　(知识库相关性的判定定理)　设 Ω 是 U 上的一族等价关系(一个知识库)。$R\in\Omega$ 在族 Ω 之中是可省的 iff　$\mathrm{ind}(\Omega-\{R\})\subseteq R$ 。Ω 是相关的 iff 存在 Ω 的非空子族 Δ 使得 $\mathrm{ind}(\Omega-\lambda)\subseteq\mathrm{ind}(\Delta)$ 。

定义6　设 P 和 Q 为论域 U 上的等价关系。定义 Q 的 P 正域为 $\mathrm{POS}_P(Q)=\cup_{X\in U/Q}P_*(X)$。

定理7(正域表示定理)$\mathrm{POS}_p(Q)=\{x\mid x\in U\wedge[x]_p\subseteq[x]_Q\}$。

证明　首先,根据定义6,显然有 $\mathrm{POS}_P(Q)=U_{x\in U}P_*([x]_Q)$ 。其次,对于任意的 $x\in U$,由定理3易知 $P_*([x]_Q)=\{y\mid y\in[x]_Q\subseteq[y]_P[x]_Q\}$ 。

对于任意的 $x\in U$,任取 $y\in P_*([x]_Q)$,由上面的等式知 $y\in[x]_Q$ 且 $[y]_P\subseteq[x]_Q$,注意到 $[x]_Q=[y]_Q$,可得 $[y]_P\subseteq[x]_Q$。即有 $y\in\{z\mid z\in U\wedge[z]_P\subseteq[z]_Q\}$ 。从而由 y 的任意性可知 $P_*([x]_Q)\subseteq\{z\mid z\in U\wedge[z]_P\subseteq[z]_Q\}$。再由 x 的任意性得 $\mathrm{POS}_P(Q)=\cup_{x\in U}P_*([x]_Q)\subseteq\{z\mid z\in U\wedge[z]_P\subseteq[z]_Q\}$。

另一方面,对于任意的 $x\in\{y\mid y\in U\wedge[y]_p\subseteq[y]_Q\}$,有 $[x]_p\subseteq[x]_Q$。显然 $x\in[x]_Q$。从而 $x\in\{y\mid y\in[x]_Q\wedge[y]_P\subseteq[y]_Q\}=P_*([x]_Q)\subseteq\cup_{x\in U}P_*([x]_Q)=\mathrm{POS}_P(Q)$ 。再由 x 的任意性可推得 $\{y\mid y\in U\wedge[y]_p\subseteq[y]_Q\}\subseteq\mathrm{POS}_P(Q)$。

结合以上两个方面的结果便知 $POS_P(Q)=\{x|x\in U\wedge[x]_P\subseteq[x]_Q\}$ 。证毕。

4 结论

定理1的优点是不用计算上下近似即可判定粗糙集。定理3、7给出了上下近似和正域的表示,容易编程实现。定理2揭示了Pawlak粗糙集理论的实质:用拓扑空间的开闭子集来逼近其它子集,用子布尔代数的元素来逼近布尔代数的其它元素。定理5表明上近似是闭包算子,下近似是内部算子,这与现有文献上粗糙算子公理化的有关结果是一致的。定理4、6说明包含相等关系的知识库在理论上将被约简为一个相等关系,这显然不是人们进行知识约简的初衷。由于并不是每一门知识都具有布尔代数结构或拓扑结构,因此定理2、4、5、6共同说明了Pawlak粗糙集理论的局限性,从而提出其它的粗糙集模型是必要的。

参考文献:

[1] Pawlak Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11 (3): 341 -356.

[2] Pawlak Z. Rough Classification [J]. International Journal of Man - Machine Studies, 1984, 20 (4): 469 -483.

[3] Pawlak Z. Rough Set Theory and Its Applications to Data Analysis[J]. International Journal of Cybernetics and Systems, 1998, 29 (5): 661 -688.

[4] Pawlak Z. Rough sets [J]. Communication of the ACM, 1995, 38 (1): 89 -95.

[5] 张文修. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社, 2003.
ZHANG Wenxiu. Rough Set Theory and Methods[M]. Beijing:Science Press,2003. (in Chinese)

[6] 史忠植. 高级人工智能[M]. 北京:科学出版社, 2006.
SHI Zhongzhi. Advanced Artificial Intellingence[M]. Beijing:Science Press,2006. (in Chinese)

[7] 曾黄麟. 粗集理论及其应用[M]. 重庆:重庆大学出版社, 1998.
ZENG Huanglin. Rough Set Theory and Applications[M]. Chongqing:Chongqing University Press,1998. (in Chinese)

[8] 孙东延. 粗糙集理论在传感器目标识别中的应用 [J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2007, 8(4): 42 -44.
SUN Dongyan. Applications of Rough Set in Target Identification[J]. Journal of Air Force University:Natural Science Edition, 2007,8(4):42 -44. (in Chinese)

[9] Banerjee M,Mitra S,Pal S K. Rough Fuzzy MLP:Knowledge Encoding and Classiffication[J]. IEEE Transactions on Neural Networks,1998,(9):1203 - 1216.

[10] Banerjee M,Pal S K. Roughness of A Fuzzy Set[J]. Information Sciences,1996,93:235 -246.

(编辑:田新华)

A Few Important Properties of Pawlak Rough Sets

ZHOU Wei, LEI Ying -jie
(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract:In order to gain a deeper comprehension of rough set theory in arbitrary universes (not only in finite universes), definitions of R - rough set and R - accurate set are presented from the equivalence relations R in arbitrary universes. These definitions are independent of the upper and lower approximations. Based on this, the properties of R - accurate sets are investigated, a determination theorem and a closeness theorem of operations of accurate sets are put forward and proved. Then the properties of the upper and lower approximations are discussed, again, a representation theorem, a comparison theorem and a topological structure theorem of the upper and lower approximations of rough sets are presented and proved. Finally the dependency of a knowledgebase is researched; a representation theorem of positive areas and a determination theorem of dependency of the knowledgebase are given. These results enrich to a certain extent Pawlak's rough set theory. The conception of accurate set in Chinese is updated.

Keywords:rough set; representation theorem; topological structure; determination theorem.