阶乘进制中位数码之和的 k 次幂的计算

梁放驰， 井爱雯
(空军工程大学 理学院，陕西 西安 710051)

摘 要:为揭示整数在阶乘进制表示中的规律,研究了阶乘进制中一类位数码函数的性质。设 $w(m)$ 为整数 $m(0\leqslant m\leqslant n!-1)$ 在阶乘进制表示中的位数码之和。对任意和正整数 x 和任意给定的整数 $k\geqslant 0$,并利用组合数学的方法给出了具有 k 次幂的一个精确计算公式。所得结果在编码、密码和计算复杂性理论中有很好的应用前景。

关键词:阶乘进制;位数码之和;计算公式
中图分类号: O156.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2008)02-0088-04

关于阶乘函数 $n!=n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1$ 的性质,国内外有许多学者对其进行了研究,并且得到了很多有意义的结果,其中最著名就是斯特林(J. Stirling)建立的经典 Stirling 公式[1]:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right),(0<\theta_n<1)$$

进位制是表示数的一种方法,根据不同需要,可选用不同的进位制。例如,最常见的日常计数是十进制,对于机器运算多采用二进制,星期用七进制,中药称重沿用十六进制。在组合数学[2-3]中,介绍了一种用阶乘进制表示数的方法,即从0到 $n!-1$ 之间的整数 m 可以惟一的表示为 $m=\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i i!$,其中 $0\leqslant a_i\leqslant i(i=1,2,\cdots,n-1)$。

对整数 $m(0\leqslant m\leqslant n!-1)$,令位数码函数 $w(m)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i$,即 $w(m)$ 为整数 m 在阶乘进制表示的位数码之和。对任意的整数 $x\geqslant 1$,设

$$\Delta_k(x)=\sum_{m<x}w^k(m) \tag{1}$$

式中,$\sum\limits_{m<x}$ 为对所有小于 x 的整数 m 求和。

十进制中关于位数码的问题已经被许多学者在拓扑学、组合数学以及概率理论等领域中进行过研究[4-8],Stolarsky 在发表的文章中更是列出了超过60篇的相关文献[9]。本文将利用组合数学的方法给出 $\Delta_k(x)$ 的一个精确计算公式。

1 预备知识

设 $w(n,r):=\#\{w(m)=r,0\leqslant m\leqslant n!-1\}$,即 $w(n,r)$ 表示所有在阶乘进制表示中的位数码之和为 r 的整数 $m(0\leqslant m\leqslant n!-1)$ 的个数。

对于任意给定的整数 $n\geqslant 1$,显然 $0\leqslant r\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$。设 $w(n,r)$ 的生成函数为 $F(n,x)$,则有

$$F(n,x)=\sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}}w(n,r)x^r \tag{2}$$

收稿日期:2007-05-22
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60573040)
作者简介:梁放驰(1974-),男,陕西兴平人,讲师,主要从事量子密码与编码及组合优化理论的研究.
E-mail: liangfangchi@yahoo.com.cn

又可知,$w(n,r)$ 等于适合条件 $\begin{cases} 0 \leqslant a_i \leqslant i \quad (i = 1,2,\cdots,n-1) \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i = r \end{cases}$ 的数组$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$ 的个数,因而等于 $(1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$ 的展开式中 x^r 系数,故得下面的引理1:

引理1 对任意给定的整数 $n \geqslant 1$,$w(n,r)$ 的生成函数为

$$F(n,x) = \sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} w(n,r)x^r = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) \tag{3}$$

在式(1) 中取 $x = n!$,则由 $w(n,r)$ 的定义可知

$$\Delta_k(n!) = \sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} r^k w(n,r) \tag{4}$$

如果在式(3) 中令 $x = 1$,可得

$$\Delta_0(n!) = \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} w(n,r) = n!$$

2 定理及其证明

下面将给出本文的主要结果及其证明。

定理1 对任意给定的整数 $n \geqslant 1$ 和 $k \geqslant 0$,有

$$\Delta_k(n!) = \sum_{i=0}^{k} S(k,i)F^{(i)}(n,1) \tag{5}$$

式中:$S(k,i)$ 为第二类 Stiring 数;$F^{(i)}(n,1)$ 为函数 $F(n,x)$ 关于变量 x 的 i 阶导函数在 $x = 1$ 处的值。

证明 在式(2) 中对变量 x 求 k 阶导数,并结合第一类 Stiring 数 $s(n,k)$ 的定义[2] 和式(4),可得

$$F^{(k)}(n,x) = (\sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} w(n,r)x^r)^{(k)} = \sum_{r=k}^{\frac{n(n-1)}{2}} r(r-1)\cdots(r-k+1)w(n,r)x^{r-k} =$$
$$\sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} r(r-1)\cdots(r-k+1)w(n,r)x^{r-k} = \sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} (\sum_{i=0}^{k} s(k,i)r^i w(n,r))x^{r-k} =$$
$$\sum_{i=0}^{k} s(k,i)\Delta_I(n!)x^{r-k}$$

令 $x = 1$,则有

$$F^{(k)}(n,1) = \sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} (\sum_{i=0}^{k} s(k,i)r^i w(n,r)) = \sum_{i=0}^{k} s(k,i)(\sum_{r=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} r^i w(n,r)) \tag{6}$$

结合式(4) 和式(6) 可得

$$F^{(k)}(n,1) = \sum_{i=0}^{k} s(k,i)\Delta_i(n!) \tag{7}$$

从而由式(7) 和 Stiring 反演公式[10] 即可推出式(5)。于是就证明了定理1。

由引理1可知:

$$F'(n,1) = \frac{n!}{4}n(n-1), F''(n,1) = \frac{n!}{144}n(n-1)(n-2)(9n-13)$$

因此,由定理1可得下面的推论:

推论1 对任意给定的整数 $n \geqslant 1$,有 $\Delta_1(n!) = \frac{n!}{4}n(n-1)$。

推论2 对任意给定的整数 $n \geqslant 1$,有 $\Delta_2(n!) = \frac{n!}{144}n(n-1)(9n^2-5n+10)$。

定理2 设 $n \geqslant 1$ 和 $k \geqslant 0$ 均为任意给定的整数,则对任意的整数 $a(1 \leqslant a \leqslant n)$,有

$$\Delta_k(an!) = \Delta_k(n!) + \sum_{t=1}^{a}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(t-1)^{k-j}\Delta_j(n!)$$

证明 注意到,$w(m+tn!) = w(m)+t, 0 \leqslant t \leqslant n$,所以

$$\Delta_k(an!) = \sum_{m<an!} w^k(m) = \sum_{t=1}^{a} \sum_{(t-1)n! \leqslant m < tn!} w^k(m) =$$

$$\sum_{t=1}^{a} \sum_{m<n!} w^k(m+(t-1)n!) = \sum_{t=1}^{a} \sum_{m<n!} (w(m)+(t-1))^k =$$

$$\sum_{m<n!} w^k(m) + \sum_{t=2}^{a} \sum_{m<n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (t-1)^{k-j} w^j(m) =$$

$$\Delta_k(n!) + \sum_{t=2}^{a} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (t-1)^{k-j} \sum_{m<n!} w^j(m) =$$

$$\Delta_k(n!) + \sum_{t=2}^{a} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (t-1)^{k-j} \Delta_j(n!)$$

于是就完成了定理 2 的证明。

定理 3 对任意的正整数 x,设它在阶乘进制中的表示为

$$x = a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + \cdots + a_1 \cdot 1!$$

则有计算公式

$$\Delta_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_i=k} \binom{k}{j_1 j_2 \cdots j_i} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_{i-1}^{j_{i-1}} \Delta_{j_i}(a_i \cdot i!) \tag{8}$$

式中,$a_n \neq 0, 0 \leqslant a_i \leqslant i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$。

证明 对于给定的 $x = a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + \cdots + a_1 \cdot 1!$,令

$$x_n = x, x_{n-1} = x_n - a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + \cdots + a_1 \cdot 1!$$

$$x_{i-1} = x_i - a_n \cdot n! = a_{i-1} \cdot (i-1)! + \cdots + a_1 \cdot 1! , (2 \leqslant i \leqslant n), x_0 = 0$$

因为 $w(m+i \cdot n!) = w(m)+i, 0 \leqslant i \leqslant n-1$,所以

$$\Delta_k(x) = \sum_{m<x} w^k(m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x_{i-1} \leqslant m < x_i} w^k(m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{m \leqslant a_i i!} w^k(m + a_{i-1} \cdot (i-1) + \cdots + a_1 \cdot 1!) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{m<a_i i!} (w(m) + a_{i-1} + \cdots + a_1)^k =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{m<a_i i!} \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_i=k} \binom{k}{j_1 j_2 \cdots j_i} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_{i-1}^{j_{i-1}} w^{j_i}(m) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_i=k} \binom{k}{j_1 j_2 \cdots j_i} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_{i-1}^{j_{i-1}} w^{j_i} \sum_{m<a_i i!} w^{j_i}(m) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_i=k} \binom{k}{j_1 j_2 \cdots j_i} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \cdots a_{i-1}^{j_{i-1}} w^{j_i} \Delta_{j_i}(a_i i!)$$

定理 3 证毕。

参考文献:

[1] 匡继昌. 常用不等式(第三版)[M]. 济南:山东科学技术出版社, 2004.
KUANG Jichang. Applied Inequalities(3rd ed.)[M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2004. (in Chinese)

[2] 田秋成. 组合数学[M]. 北京: 电子工业出版社, 2006.
TIAN Qiucheng. Combinatorics[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industy, 2006. (in Chinese)

[3] 卢开澄,卢开明. 组合数学[M]. 北京:清华大学出版社,2002.
LU Kaichng, LU Kaiming. Combinatorics[M]. Beijing: Tsinghua Unversity Press, 2002. (in Chinese)

[4] Cooper C, Kennedy R E. Digit Sum Sums [J]. J Inst Math Comp Sci,1992,5(1):45 - 49.

[5] Cooper C, Kennedy R E. Sums of Power of Digital Sum[J]. The Fibonacci Quarterly,1993,31(4):341 - 345.

[6] Brown T C. Powers of Digital Sums[J]. The Fibonacci Quarterly,1993,31:207 - 210.

[7] YU Xiuyuan. The Average Order of Powers of Digit - sums[J]. Chinese Science Bulletin,1996,41(7):581 - 585.

[8] YU Xiuyuan. The Behavior of Function Related to the Digit - sequence[J]. Acta Mathematica Sinica,2000,43(2):221 - 224.

[9] Stolarsky K B. Power and Exponential Sums of Digital Sums Related to Binomital Coefficient Parity[J]. SIAM J Appl Math, 1977,32(4):717 - 730.

[10] Richard P S. 计数组合学[M]. 北京:机械工业出版社, 2004.
Richard P S. Enumerative Combinatorics[M]. Beijing: China Machine Press, 2004. (in Chinese)

(编辑:田新华,徐楠楠)

Computation of k － th Powers of Digital Sums in the Factorial Base

LIANG Fang－chi, JING Ai－wen
(Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: In order to find the rules of the representation for integers under the factorial base, a kind of digital sum function and its characteristics are studied. Let $w(m)$ denote the digital sum of integer m $m(0 \leqslant m \leqslant n! -1)$ in the factorial base. For any positive integer x and any given integer $k \geqslant 0$, a sharp calculating formula of the k － th power of this function is obtained by a mathematical combination method. These results are of perspective value in coding, cryptography and computation complexity theory.

Key words: factorial base; digital sum; calculating formula

(上接第38页)

[7] 殷勤业, 邹理和, Newcomb R W. 一种高分辨率二维信号参数估计方法——波达方向矩阵法[J]. 通信学报, 1991,12(4):1－7.
YIN Qinye, ZOU Lihe, Newcomb R W. A High Resolution Approach to 2－D Signal Parameter Estimation－DOA Matrix Method[J]. Journal on Communications, 1991, 12(4):1－7. (in Chinese)

[8] 徐友根,刘志文. 空间相干源信号频率和波达方向的同时估计方法[J]. 电子学报,2001, 29(9):1179－1182.
XU Yougen, LIU Zhiwen. A New Method for Simultaneous Estimation of Frequency and DOA of Emitters[J]. Acta Electronica Sinica. 2001, 29(9):1179－1182. (in Chinese)

[9] 曾　超,廖桂生,王洪洋. 一种基于双平行线阵相干源二维波达方向估计的新方法[J]. 雷达科学与技术,2003,1(2):104－108.
ZENG Chao, LIAO Guisheng, WANG Hongyang. A New Method for Estimating 2－D DOA in Coherent Source Environment With Two Parallel Linear Array[J]. Radar Science and Technology, 2003, 1(2):104－108. (in Chinese)

[10] 张　辉,葛临东,李　蒙,等. 多径环境二维波达方向估计的子空间平滑算法[J]. 电子学报,2005,33(6):1077－1080.
ZHANG Hui, GE Lindong, LI Meng, et al. Multipath 2－D Direction Finding With Subspace Smoothing Algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(6):1077－1080. (in Chinese)

(编辑:田新华,徐楠楠)

A New Method for Joint Estimation of 3 － D Parameters of Coherent Signals over Wide Frequency Band

DU Gang, ZHANG Yong－shun, JIANG Xin－ying
(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

Abstract: Based on non－uniform L － shaped array, a new method is presented to estimate the frequency and 2 － D arrival angles of coherent signals over a wide frequency band, which is called joint smoothing DOA (JSDOA) algorithm. The smoothed DOA matrix is constructed by using the temporal and spatial data of L －shaped array, and then 3 － D parameters of coherent signals can be obtained via the analysis of its eigenvalue. The algorithm is precise in estimating 3 － D parameters of coherent signals with same digital frequency, thus avoiding the loss of array aperture with smaller computational load and parameters paired automatically. The simulation results confirm its effectiveness.

Key words: wide frequency band; coherent source; 3 － D parameter estimation; smoothing technique