混沌系统的最优保性能控制

朱少平
(西安财经学院统计学院，陕西 西安　710061)

摘　要:研究了混沌系统的最优保性能控制问题。通过采用线性矩阵不等式方法,获得了一类混沌系统存在保性能控制律的一个充分必要条件,在此基础上,通过建立并求解一个凸优化问题,给出了混沌系统的最优保性能控制律的设计方法。以 Chen 系统作为典型的例子,验证了这种控制方法的有效性。

关键词:混沌系统;保性能控制;线性矩阵不等式
中图分类号: O231　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2007)06-0027-04

自1990年Ott等人提出了对混沌系统控制的开创性的OGY方法[1]以来,对混沌控制与同步的研究受到国内外科学工作者的广泛关注,各种混沌控制方法层出不穷。Pyragas提出一种延迟反馈控制方法[2];Huberman提出了参数自适应算法[3];Vasailiadis提出基于参考模型的自适应控制算法[4];Alsing采用反向传播BP网络来稳定镶嵌于混沌系统中的不稳定周期轨道[5];Chen Liang 等应用混沌时间序列对未知混沌系统进行了预测和控制[6]; W. Yu 利用等效无源技术实现了对 Lorenz 系统的稳定[7]。

Chang 和 Peng[8]提出了不确定系统的保性能控制问题(guaranteed cost control),其主要思想是对系统设计一个控制律,不仅是闭环系统稳定,而且使得闭环系统的性能指标不超过某个确定的上界。近几年不确定系统的保性能控制问题已成为一个研究热点[9-11]。本文把保性能控制的理论应用于混沌系统的控制,将混沌系统分解为线性部分和非线性部分之和,利用不确定系统的保性能控制的理论和线性矩阵不等式技术,得到了系统存保性能控制律的一个充分必要条件,给出了混沌系统的最优保性能控制律的设计方法。最后给出的仿真实例验证了方法的有效性。

1　问题描述

考虑有如下状态空间模型描述的一类混沌控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t))x(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0\end{aligned} \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$,$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^m$, 分别是系统的状态向量和控制输入, $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 是具有适当维数的实数矩阵, $\Delta\boldsymbol{A}(t)$ 是时变的,且假定是范数有界并具有如式(2)形式。式中:$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{E}$ 是具有适当维数的实常数矩阵, $\boldsymbol{F}(t)$ 满足式(3)的矩阵,$\boldsymbol{I}$ 表示适当维数的单位矩阵。

$$\Delta A(t)=DF(t)E \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I} \tag{3}$$

对系统(1)定义一个性能指标

$$\boldsymbol{J}=\int_0^{+\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{R}>0$,$\boldsymbol{Q}>0$ 是给定的加权矩阵。

收稿日期:2006-12-12
基金项目:高等学校博士学科点专项基金(20060700007);陕西省自然科学基金资助项目(2005F15);西安财经学院科研基金资助项目(06JD02)
作者简介:朱少平(1963-),男,陕西岐山人,副教授,博士生,主要从事非线性控制和随机控制研究.

定义 1[12] 对系统(1)和性能指标(4),若存在一个矩阵 $K \in R^{m\times n}$ 和一个正定对称矩阵 $P \in R^{m\times n}$,使得对所有非零的 $x(t) \in R^n$ 和所有满足式(3)的 F,

$$x^{\mathrm{T}}(t)[(A+DF(t)E+BK)^{\mathrm{T}}P+P(A+DF(t)E+BK)]x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)[Q+K^{\mathrm{T}}RK]x(k)<0 \tag{5}$$

则控制律 $u(t)=Kx(t)$ 称为是系统(1)的一个具有保性能矩阵 P 的保性能控制律。

保性能控制和二次镇定[8]以及闭环性能指标值之间的关系由以下引理给出。

引理 1[12] 若 $u(t)=Kx(t)$ 是系统(1)和性能指标(4)的一个具有保性能矩阵 P 的保性能控制律,则对所有满足式(3)的 $F(t)$,闭环系统式(6)是二次稳定的,且相应的闭环性能指标值满足式(7)。其中,$x_0 \in R^n$ 是系统(1)的初始条件。

$$\dot{x}(t)=[A+DF(t)E+BK]x(t) \tag{6}$$

$$J \leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0 \tag{7}$$

引理 1 中所得到的闭环性能指标的界依赖于初始状态 x_0,然而,混沌系统对初值是很敏感的。为克服这个困难,假定 x_0 是一个满足 $E\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\}=I$ 的零均值随机向量,此时,闭环系统性能指标的期望值

$$\bar{J}=E\{J\}\leqslant E\{x_0^{\mathrm{T}}Px_0\}=\mathrm{tr}(P) \tag{8}$$

$J^*=\mathrm{tr}(P)$ 称为是闭环系统的保性能。

本文的目的是对混沌系统(1)和性能指标(4),给出保性能控制律的存在条件和设计方法,并进一步探讨使闭环系统的保性能最小化的最优保性能控制律的设计问题。

2 控制律存在的条件与设计

引理 2[12] 给定适当维数的矩阵 Y,H 和 E ,其中 Y 是对称的,则 $Y+HFE+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0$ 对所有的 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$ 矩阵 F 成立当且仅当存在一个正数 ε ,使得 $Y+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0$。

定理 1 系统(1)存在一个保性能控制律 $u(t)=Kx(t)$ 的充分必要条件是存在一个常数 $\varepsilon>0$,一个矩阵 W 和一个对称矩阵 $X>0$,使得

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & X & W^{\mathrm{T}} & XE^{\mathrm{T}} \\ X^{\mathrm{T}} & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ W & 0 & -R^{-1} & 0 \\ EX & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix}<0 \tag{9}$$

式中:$\bar{A}=XA^{\mathrm{T}}+AX+BW+W^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\varepsilon DD^{\mathrm{T}},K=WX^{-1}$。

证明: 根据定义 1,系统(1)存在一个保性能控制律 $u(t)=Kx(t)$ 的充分必要条件是存在矩阵 K 和对称矩阵 $P>0$,使得

$$(A+DFE+BK)^{\mathrm{T}}P+P(A+DFE+BK)+Q+K^{\mathrm{T}}RK<0 \tag{10}$$

由引理 2,式(10)等价于存在正数 ε,使得

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+K^{\mathrm{T}}RK+PBK+K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P+\varepsilon PDD^{\mathrm{T}}P+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0 \tag{11}$$

对式(11)两端分别左乘和右乘矩阵 P^{-1},再令 $P^{-1}=X$,$KP^{-1}=W$,得等价表达式为

$$XA^{\mathrm{T}}+XA+BW+W^{\mathrm{T}}B+\varepsilon DD^{\mathrm{T}}+XQX+W^{\mathrm{T}}RW+\varepsilon^{-1}XE^{\mathrm{T}}EX<0 \tag{12}$$

由矩阵的 Schur 补性质,可得式(12)等价于矩阵不等式(9)。定理得证。

下面利用定理 1 的结果来研究最优保性能控制律的设计问题。

定理 2 对给定的系统(1)和性能指标(4),如果以下的优化问题

$$\min_{\varepsilon,X,W,S} \mathrm{tr}(S)$$

$$\text{s. t.} \begin{pmatrix} \bar{A} & X & W^{\mathrm{T}} & XE^{\mathrm{T}} \\ X^{\mathrm{T}} & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ W & 0 & -R^{-1} & 0 \\ EX & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix}<0 \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & S \end{pmatrix}>0$$

有一个最优解$(\tilde{\varepsilon},\tilde{X},\tilde{W},\tilde{S})$,则$\boldsymbol{u}(t)=\tilde{W}\tilde{X}^{-1}$是系统(1)的最优保性能控制律。相应的闭环系统的保性能$J^{*}=\mathrm{tr}(\tilde{X}^{-1})$。其中,$\bar{A}=XA^{\mathrm{T}}+AX+BW+W^{\mathrm{T}}B+\varepsilon DD^{\mathrm{T}}$。

证明:显然,优化问题(13)的解一定是矩阵不等式(9)的可行解。

若$(\tilde{\varepsilon},\tilde{X},\tilde{W},\tilde{S})$是优化问题(13)的一个解,则$(\tilde{\varepsilon},\tilde{X},\tilde{W})$是矩阵不等式(9)的一个可行解,故由定理 1 可知$\boldsymbol{u}(t)=\tilde{W}\tilde{X}^{-1}$是系统(1)的保性能控制律。另外,由优化问题(13)的第二个约束条件和矩阵的 Schur 补性质可得$X^{-1}<S$。因此,$\mathrm{tr}(X^{-1})<\mathrm{tr}(S)$。由此可知$\mathrm{tr}(S)$的最小化保证了$\mathrm{tr}(X^{-1})$的最小化。因此,由$(\tilde{\varepsilon},\tilde{X},\tilde{W},\tilde{S})$是问题(13)的一个最优解可推出$\boldsymbol{u}(t)=\tilde{W}\tilde{X}^{-1}$是系统(1)的最优保性能控制律。定理得证。

3　仿真实验

Chen 系统的动态方程为

$$\dot{x}_1=-35x_1+35x_2\qquad \dot{x}_2=-7x_1+28x_2-x_1x_3\qquad \dot{x}_3=-3x_3+x_1x_2 \tag{14}$$

取初值(2,3,1)时系统呈现混沌现象,其状态变量的变化见图 1。

为了将其状态控制在平衡点$\boldsymbol{x}=[0,0,0]$,把系统(14)按系统(1)的形式整理:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-35&35&0\\-7&28&0\\0&0&-3\end{pmatrix},\Delta\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-x_1\\0&-x_1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&x_1&0\\0&0&x_1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&10&0\end{pmatrix}$$

取$\boldsymbol{B}=[0,1,0]^{\mathrm{T}}$,$Q=0.5$,$R=0.1$,按式(13)建立相应的优化问题,用 MATLAB 软件中有关 LMI 的工具,可得该优化问题的最优解,进而得到 Chen 系统的最优保性能控制律:

$$\boldsymbol{u}(t)=[6.004\,6,\ -51.318\,5,0]\boldsymbol{x}(t),$$

相应的闭环系统的保性能$J^{*}=5.589\,4$。

考虑到混沌系统对初值的敏感性,在第 40 s 将此控制律施加于 Chen 系统,成功地实现了对混沌的控制,仿真结果见图 2,图 3,图 4。

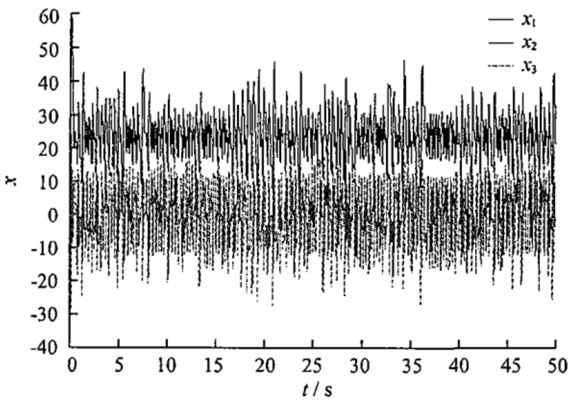

图 1　状态变量 x_1,x_2,x_3 随时间的变化图

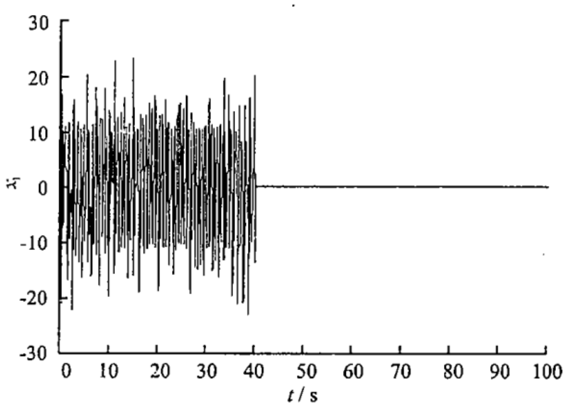

图 2　x_1 从混沌态被控制到稳定态的时变图

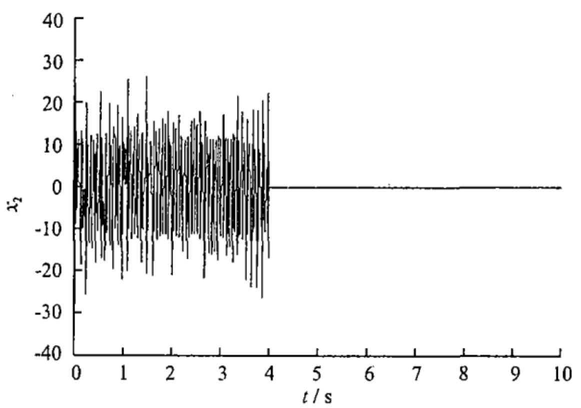

图 3　x_2 从混沌态被控制到稳定态的时变图

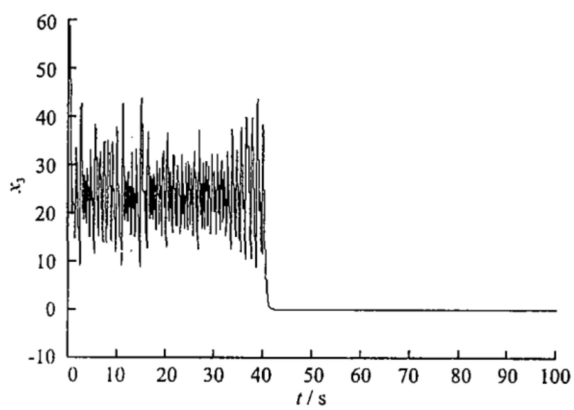

图 4　x_3 从混沌态被控制到稳定态的时变图

4 结论

本文采用不确定性系统的保性能控制理论和线性矩阵不等式方法,得到了混沌系统的最优保性能控制律,成功地实现了对连续混沌系统的有效控制。这种方法的一个显著优点是适应于难于找到精确数学模型的系统如生物系统、化学系统、社会经济系统中的混沌控制,因而这种混沌控制的方法具有很大的应用潜力。

参考文献:

[1] Ott E, Grebogi C, York J A. Controlling chaos[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64: 1196 - 1199.

[2] Pyragas K. Experimental Control of Chaos by Delayed Self - Controlling Feedback[J]. Phys Lett, 1992, 170: 421 - 428.

[3] Huberman B A. Dynamics of Adaptive Systems[J]. IEEE Trans, 1990, 37(4): 547 - 550.

[4] Vassiliadis D. Parametrics Adaptive Control and Parameter Identification of Low - Dimentional Chaoticsystems[J]. Phys D, 1994, 71: 319 - 341.

[5] Alsing P M, Garielides A. Using Neural Networks for Controlling Chaos[J]. Phys Rev E, 1994, 49: 1225 - 1231.

[6] Chen L, Chen G R. Fuzzy Predictive Control of Uncertain Chaotic Systems Using Time Series[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 1999, 9(4): 757 - 767.

[7] Yu W. Passive Equivalence of Chaos in Lorenz system[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1999, 46(7): 876 - 878.

[8] Chang S S L, Peng T K C. Adaptive Guaranteed Cost Control of System With Uncertain Parameeters[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1972, 17(4): 474 - 483.

[9] Yu L. Optimal Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain System: an LMI approach. Control Theorey and Applications [J]. 2000, 17(3): 423 - 428.

[10] 关新平. 不确定时滞系统的模糊保成本控制[J]. 控制与决策, 2002, 17(2): 178 - 182.

[11] 郑 科, 徐建明, 俞 立. 基于T-S模型的倒立摆最优保性能模糊控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 703 - 708.

[12] 王德进. H_2 和 H_∞ 优化控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001, 207 - 211.

(编辑:姚树峰)

Optimal Guaranteed Cost Control in Chaotic System

ZHU Shao - ping

(School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710061, China)

Abstract: This paper makes a study of the problem of guaranteed cost control in chaotic systems, and obtains a necessary and sufficient condition existing in guaranteed cost controllers. The result shows that this condition is equivalent to the feasibility problem of a certain linear matrix - inequality system, and provides a guaranteed cost controller. The design problem of optimal guaranteed cost controller in chaotic systems is formulated as a convex optimization problem on the basis of this, which can be solved by convex optimization techniques. Finally Chen system is taken as an example to demonstrate the effectiveness of this method.

Key words: chaotic systems; guaranteed cost control; LMI