非线性脉冲时滞抛物型偏微分方程组边值问题的振动准则

罗李平

(衡阳师范学院 数学系，湖南 衡阳 421008)

摘　要：考虑一类具非线性扩散系数的脉冲时滞抛物型偏微分方程组，利用 Green 公式、垂直相加法和脉冲时滞微分不等式，获得了该类方程组在 Robin 边值条件下所有解振动的充分判据. 所得结果充分反映了脉冲和时滞在振动中的影响作用。

关键词：脉冲；时滞；抛物型偏微分方程组；振动性；非线性扩散系数

中图分类号：O175.26　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009 - 3516(2007)05 - 0091 - 04

脉冲偏微分方程的研究最早见于 1986 年和 1988 年[1-2]。然而，由于印刷量小及语言障碍(这些文献是用俄文发表的)，使之鲜为人知。实际上，被国际数学界真正了解的有关脉冲偏微分方程的第一篇论文应该是文献[3](1991 年 Erbe 等学者在研究单一物种生长模型时给出了脉冲抛物方程稳定性的比较准则)。之后，对其研究日益受到重视[4-5]。脉冲偏微分方程的振动理论作为其中的一个重要研究领域，对其研究仅是近几年的事情，已陆续有很多好的研究工作发表[6-17]，但对脉冲偏微分方程组的振动性研究还不多见[8-20]，而关于具非线性扩散系数的脉冲偏微分方程组的振动性研究，就作者所知，目前国内外尚未见报道。本文研究了一类特殊的具非线性扩散系数的脉冲时滞抛物型偏微分方程组在 Robin 边值条件下解的振动性，通过将这类方程组解的振动判别问题转化为脉冲时滞微分不等式最终正(负)解的存在性问题，建立了判别其所有解振动的不需要利用特征值的充分性条件，所得结果充分反映了脉冲和时滞在振动中的影响作用。

考虑如下的脉冲时滞抛物型偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} = a_i(t)h_i(u_i(t,x))\Delta u_i(t,x) + \displaystyle\sum_{r=1}^{n} a_{ir}(t)h_{ir}(u_i(t-\tau_r(t),x))\Delta u_i(t-\tau_r(t),x) - \\ \displaystyle\sum_{j=i}^{m} q_{ij}(t,x)u_j(t-\rho,x),\ t \neq t_k, i \in I_m \\ u_i(t_k^+,x) - u_i(t_k^-,x) = b_k u_i(t,x),\ t = t_k, k \in I_\infty \end{cases} \tag{1}$$

式中：

(ⅰ) $I_m = \{1,2,\cdots,m\}$, $I_\infty = \{1,2,\cdots\}$, $(t,x) \in R_+ \times \Omega \equiv G$, $R_+ = [0,\infty)$, $\Omega \subset R^M$ 是具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，Δ 是 R^M 中的 M 维 Laplace 算子；

(ⅱ) σ,ρ 为正常数，$\tau_r(t) \in C(R_+,(0,\infty))$，且 $0 < \tau_r(t) < \tau$, $r \in I_n$; $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} = \infty$; $b_k > 1, k \in I_\infty$；

(ⅲ) $a_i(t), a_{ir}(r) \in PC(R_+ R_+)$, $q_{ij}(t,x) \in PC(R_+ \times \overline{\Omega}, R)$, $q_{ii}(t,x) > 0$, $i,j \in I_m$, $r \in I_n$，这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类：仅在 $t = t_k, k \in I_\infty$ 为第一类间断点，但在 $t = t_k$ 左连续；$a(t) = \min\limits_{i\in I_m}\{a_i(t)\}$, $b(t) = \min\limits_{i\in I_m}\{b_i(t)\}$, $q_{ij}(t) = \inf\limits_{x\in\Omega}\{q_{ij}(t,x)\}$, $\overline{q}_{ij}(t) = \sup\limits_{x\in\Omega}\{|q_{ij}(t,x)|\}$, $Q(t) = \min\limits_{i\in I_m}\{q_{ii}(t) - \displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\overline{q}_{ji}(t)\} > 0$, $t \in R_+$, $i,j \in I_m$；

收稿日期：2007 - 01 - 23
基金项目：湖南省自然科学基金资助项目(05JJ40008)；2007 年湖南省教育厅科研项目
作者简介：罗李平(1964 -)，男，湖南耒阳人，副教授，主要从事偏泛函微分方程振动理论研究.

(iv) $h_i(u_i), h_{ir}(u_i) \in C^1(R, R_+)$, $u_i h'_i(u_i) \geq 0, u_i h'_{ir}(u_i) \geq 0$, $i \in I_m, r \in I_n$

同时考虑如下的 Robin 边值条件:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial N} + \beta(x)u_i(t,x) = 0, x \in \partial\Omega, t \neq t_k, i \in I_m, k \in I_\infty \tag{2}$$

式中:N 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量,$\beta(x) \in C(\partial\Omega,(0,\infty))$。

定义 1 称向量函数 $\boldsymbol{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_m(t,x))^{\mathrm{T}}$ 为边值问题(1)、(2) 的解,若对 $i \in I_m$, $u_i(t,x)$ 满足:

1) 对固定的 x, $\boldsymbol{u}(t,x)$ 是以 t_k 为第 1 类间断点的分片连续函数且满足式(1) 的第 2 式;

2) 对 $t \neq t_k, x \in \Omega$, $\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}$ 存在,且满足式(1) 的第 1 式;对固定的 $t, t \neq t_k, x \in \Omega$, $\frac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial x_s^2}$ 存在,$s \in I_M$;

3) 对 $t \neq t_k, x \in \Omega$, $\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t}$ 存在且满足式(2)。

定义 2 称数值函数 $v(t,x): G \to R$ 为非振动的,若它最终为正或最终为负;反之,称 $v(t,x)$ 为振动的。称向量函数 $\boldsymbol{u}(t,x): G \to R^m$ 为非振动的,若它的每一分量都是非振动的;称向量函数 $\boldsymbol{u}(t,x): G \to R^m$ 为振动的,若它至少有一分量作为数值函数是振动的。

引理 1[21] 设 μ 是正常数,$p(t) \in C(R_+,(0,\infty))$,且 $y(t_k) = y(t_k^-), k \in I_\infty$。若满足条件

$$\limsup_{t\to\infty} \prod_{t-\mu<t_k<t} (1 + \bar{b}_k) < \infty \ , \bar{b}_k = \max\{0, b_k\} \ ;$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\mu}^{t} p(s)\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}} \limsup_{t\to\infty} \prod_{t-\mu<t_k<t} (1 + b_k)$$

则脉冲时滞微分不等式

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t-\mu) \leq 0, t \geq 0, t \neq t_k \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) \leq b_k y(t_k), k \in I_\infty \end{cases}$$

无最终正解。

定理 1 设条件(i)-(iv)成立。若

$$\limsup_{t\to\infty} \prod_{t-\rho<t_k<t} (1 + \bar{b}_k) < \infty \ , \bar{b}_k = \max\{0, b_k\} \tag{3}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\rho}^{t} Q(s)\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}} \limsup_{t\to\infty} \prod_{t-\rho<t_k<t} (1 + b_k) \tag{4}$$

则边值问题(1)、(2) 的每个非零解在区域 G 内是振动的。

证明(用反证法) 假设边值问题(1)、(2) 有一个非振动解 $\boldsymbol{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_m(t,x))^{\mathrm{T}}$,设当 $t \geq T > 0$ 时,有 $|u_i(t,x)| > 0, i \in I_m$。令 $\delta_i = \mathrm{sgn}u_i(t,x)$, $Z_i(t,x) = \delta_i u_i(t,x)$, $(t,x) \in G_T, i \in I_m$,则 $Z_i(t,x) > 0$, $(t,x) \in G_T, i \in I_m$。令 $T_1 = T + \max\{\tau, \rho\}$,则 $Z_i(t - \tau_r(t), x) > 0, Z_i(t-\rho, x) > 0, (t,x) \in G_{T_1}, i \in I_m, r \in I_n$。

对于 $t \neq t_k, k \in I_\infty$,对式(1) 的第 1 式两边同时关于 x 在 Ω 上积分,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_\Omega Z_i(t,x)\mathrm{d}x\right] + \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_i}{\delta_j} \int_\Omega q_{ij}(t,x) Z_j(t-\rho,x)\mathrm{d}x =$$

$$a_i(t)\int_\Omega h_i(u_i(t,x))\Delta Z_i(t,x)\mathrm{d}x + \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(t)\int_\Omega h_{ir}(u_i(t-\tau_r(t),x))\Delta Z_i(t-\tau_r(t),x)\mathrm{d}x, t \geq T_1, i \in I_m \tag{5}$$

由 Green 公式,边值条件(2) 及(iv) 有

$$\int_\Omega h_i(u_i(t,x))\Delta Z_i(t,x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} h_i(u_i)\frac{\partial Z_i}{\partial \boldsymbol{N}}\mathrm{d}s - \int_\Omega \nabla h_i(u_i) \cdot \nabla Z_i \mathrm{d}x =$$

$$-\int_{\partial\Omega} h_i(u_i)\beta(x)u_i\mathrm{d}s - \int_\Omega \delta_i h'_i(u_i)|\nabla u_i|^2\mathrm{d}x \leq 0, t \geq T_1, i \in I_m \tag{6}$$

$$\int_\Omega h_{ir}(u_i(t-\tau_r(t),x))\Delta Z_i(t-\tau_r(t),x)\mathrm{d}x \leq 0, t \geq T_1, i \in I_m, r \in I_n \tag{7}$$

式中 $\mathrm{d}s$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素。

令 $V_i(t) = \int_\Omega Z_i(t,x)\mathrm{d}x, t \geq T_1, i \in I_m$。显然 $V_i(t) > 0, t \geq T_1, i \in I_m$，于是由式(5) - (7)，并结合(ⅲ)可得

$$V'_i(t) + q_{ii}(t)V_i(t-\rho) - \sum_{j=1,j\neq i}^{m} \bar{q}_{ij}(t)V_j(t-\rho) \leq 0, t \geq T_1, i \in I_m \tag{8}$$

令 $V(t) = \sum_{i=1}^{m} V_i(t), t \geq T_1$，则有 $V(t) > 0, t \geq T_1$。不等式(8) 按 $i = 1,2,\cdots,m$ 垂直相加，并结合条件(ⅲ)，可得

$$0 \geq V'(t) + \sum_{i=1}^{m}\{q_{ii}(t)V_i(t-\rho) - \sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{q}_{ij}(t)V_j(t-\rho)\} = V'(t) + \sum_{i=1}^{m}\{q_{ii}(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{q}_{ji}(t)V_i(t-\rho)\} \geq$$

$$V'(t) + \min_{i\in I_m}\{q_{ii}(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{m}\bar{q}_{ji}(t)\}\sum_{i=1}^{m}V_i(t-\rho) = V'(t) + Q(t)V(t-p), t \geq T_1,$$

于是有

$$V'(t) + Q(t)V(t-\rho) \leq 0 \quad , \quad t \geq T_1 \tag{9}$$

对于 $t = t_k, k \in I_\infty$ 时，结合式(1) 的第 2 式及定义 1 中的条件 1) 可得

$$u_i(t_k^+,x) = u_i(t_k^-,x) + b_k u_i(t_k,x) = (1+b_k)u_i(t_k^-,x)$$

由此可知

$$\mathrm{sgn}u_i(t_k^+,x) = \mathrm{sgn}u_i(t_k^-,x)$$

于是有

$$V(t_k^+) - V(t_k^-) = \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega(\mathrm{sgn}u_i(t_k^+,x))u_i(t_k^+,x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega(\mathrm{sgn}u_i(t_k^-,x))u_i(t_k^-,x)\mathrm{d}x =$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega(\mathrm{sgn}u_i(t,x))u_i(t_k,x)\mathrm{d}x = b_kV(t_k) \tag{10}$$

从而可知式(9)、(10)有最终正解 $V(t)$ 。另一方面，由定理 1 的条件(3)，(4)及引理 1 知式(9)、(10)无最终正解，矛盾，所以边值问题(1)、(2)的所有非零解在区域 G 内振动。定理 1 证毕。

注：利用本文的方法可以类似地讨论方程组(1)分别满足 Dirichlet 边值条件 $u_i(t,x) = 0$. $x \in \partial\Omega, t \neq t_k, i \in I_m, k \in I_\infty$，或 Newman 边值条件 $\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial N} = , x \in \partial\Omega, t \neq t_k, i \in I_m, k \in I_\infty$ 的解的振动结果。只要将文中的假设条件(ⅳ)分别改为：(ⅳ) $h_i(u_i), h_{ir}(u_i) \in C^1(R;R), u_ih'_i(u_i) \geq 0, u_ih'_{ir}(u_i) \geq 0, h_i(0) = 0, h_{ir}(0) = 0, i \in I_m, r \in I_n$ 或(ⅳ) $h_i(u_i), h_{ir}(u_i) \in C^1(R;R), u_ih'_i(u_i) \geq 0, u_ih'_{ir}(u_i) \geq 0, i \in I_m, r \in I_n$。

参考文献：

[1] Rogovchenko YU, Trofimchuk S. Periodic solutions of weakly nonlinear parabolic partial differential equations and stability[D]. Ukraine: Academy of Science of Ukraine, Institute of Mathematics, 1986.

[2] Rogovchenko S. Periodic solutions of hyperbolic systems with fixed moments of impulse effect[D]. Ukraine: Academy of Science of Ukraine, Institute of Mathematics, 1988.

[3] Erbe L H, Freedman H I, Liu X Z, Wu J H. Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth[J]. J. Austral Math. Soc., Ser B, 1991, 32(4): 382 - 400.

[4] Bainov D, Kamont Z, Minchev E. Periodic boundary value problem for impulsive hyperbolic partial differential equations of first order[J]. Appl. Math. Comput., 1994, 80(1): 1 - 10.

[5] Bainov D, Kamont Z, Minchev E, et al. Asymptotic behaviour of solutions of impulsive semilinear parabolic equations[J]. Nonlinear Analysis, 1997, 30(5): 2725 - 2734.

[6] Bainov D, Minchev E. Oscillation of the solutions of impulsive parabolic equations[J]. Appl. Math. Comput., 1996, 69(2): 207 - 214.

[7] Fu X L, Liu X Z. Oscillation criteria for impulsive hyperbolic systems[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 1997, 3(2): 225 - 244.

[8] Bainov D, Minchev E. Forced oscillation of solutions of impulsive nonlinear parabolic differential - difference equations[J]. J. Korean Math. Soc., 1998, 35(4): 881 - 890.

[9] 张立琴. 具有不依赖于状态脉冲的双曲型偏微分方程的振动准则[J]. 数学学报, 2000, 43(1): 17 - 26.

[10] 邓立虎, 葛渭高. 脉冲时滞抛物型方程解的振动准则[J]. 数学学报, 2001, 44(3): 501 -506.
[11] Luo J W. Oscillation of hyperbolic partial differential equations with impulsives[J]. Appl. Math. Comput., 2002,133(2): 309 -318.
[12] Fu X L, Liu X Z, Saloganathan S. Oscillation criteria for impulsive parabolic equations with delay[J]. J. Math. Anal. Appl.. 2002, 268(2): 647 -664.
[13] Cui B T, Liu Y Q, Deng F Q. Some oscillations problems for impulsive hyperbolic differential systems with several delays [J]. Appl. Math. Comput., 2003,146(2): 667 -679.
[14] 燕居让. 脉冲时滞抛物型方程解的振动性[J]. 数学学报, 2004, 47(3): 579 -586.
[15] Liu A P, Xiao L, Liu T. Oscillation of nonlinear impulsive hyperbolic equations with several delays[J]. Electronic Journal of Differential Equation. 2004, 2004(24): 1 -6.
[16] Cui C P, Zou M, Liu A P, et al. Oscillation of nonlinear impulsive parabolic differential equations with several delays[J]. Ann. of Diff. Eqs., 2005, 21(1): 1 -7.
[17] 罗李平,谭琼华,欧阳自根. 一类非线性脉冲时滞抛物型方程的强迫振动性[J]. 武汉理工大学学报,2006,28(8):138 -142.
[18] 罗李平, 欧阳自根. 一类脉冲中立型时滞抛物方程组的振动性[J]. 应用泛函分析学报, 2006, 8(3): 257 -264.
[19] 赵 琼, 刘伟安. 一类脉冲时滞双曲型方程组解的振动性[J]. 数学杂志, 2006, 26(5): 563 -568.
[20] Zhang Y T, Luo Q. On the forced oscillation of solutions for systems of impulsive neutral parabolic differential equations with several delays[J]. J. of Math. (PRC), 2006, 26(3): 272 -276.
[21] 张玉珠, 党新益. 脉冲中立型时滞微分方程解的振动性[J]. 数学学报, 1998,41(1): 219 -224.

(编辑:田新华,徐楠楠)

Oscillation Criteria for Boundary Value Problem of Systems of Nonlinear Impulsive Delay Parabolic Differential Equations

LUO Li - ping
(Dept. of Math., Hengyang Normal University, Hengyang, Hunan,421008)

Abstract: A class of systems of impulsive delay parabolic partial differential equations with nonlinear diffusion coefficient is considered. By using Green's formula, vertical additive method and impulsive delay differential inequalities, sufficient criteria for oscillation of all solutions of such systems are obtained under Robin boundary condition. The results fully reflect the influence action of impulsive and delay in oscillation.

Key words: impulsive; delay; system of parabolic partial differential equations; oscillation; nonlinear diffusion coefficient