一类种群数量比的差分方程分析

李建全， 杨亚莉， 张小水

(空军工程大学理学院，陕西西安 710051)

摘 要：建立野生蚊子与转基因蚊子相互作用时的数量比差分方程，借助差分方程稳定性理论，获得了两类蚊子各自灭绝或共存的充要条件，并得到了两类蚊子数量比的变化趋势。

关键词：差分方程；不动点；稳定性

中图分类号：O175. 1 文献标识码：A 文章编号：1009-3516(2007)02-0075-04

众所周知，疟疾、登革热等传染病都是以蚊子为媒介在人群中传播的。但到目前为止，尚未发现针对这些疾病的有效疫苗。因此要预防和控制这些疾病的传播就需要控制和消灭其传播的媒介物——蚊子的滋生和繁殖。常用的办法是喷洒灭蚊剂。事实证明，这种方法在一些发展中国家并不完全有效，因为长时间的喷洒灭蚊剂会使蚊子产生一定的耐药性。基于这一原因，国外的一些科学家培育出一类转基因蚊子[1-3]。在该类蚊子体内，疟疾、登革热等疾病的病原体不能存活，同时被转移的基因具有遗传性。于是科学家们将这类转基因的蚊子投放到野生蚊子滋生的场所，使野生蚊子和转基因蚊子相互交配，从而使该场所的野生蚊子最终得以控制和灭绝。

文献[4]对投放转基因蚊子后，两类蚊子的相互作用过程建立差分方程模型，并就蚊子间进行常数率交配和比例型交配两种情形进行分析，发现两类蚊子的数量变化会出现2－周期和拟周期振荡等现象。

本文将在文献[4]研究的基础上，分析在两类蚊子相互作用过程中数量比的变化情况，从而给出两类蚊子各自最终灭绝或共存的充要条件。

1 模型

首先介绍文献[4]就野生蚊子和转基因蚊子相互作用建立的差分方程模型。

分别以 x_n 和 y_n 表示处于 n 代的野生蚊子和转基因蚊子的数量. 当两类蚊子的数量都较大时，蚊子间的交配率达到饱和，可认为是一个常数，于是这种情形下两类蚊子相互作用的数学模型即为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{a_1 x_n + b_1 y_n}{x_n + y_n} x_n \mathrm{e}^{-d-k(x_n+y_n)} \\ y_{n+1} = \dfrac{a_2 x_n + b_2 y_n}{x_n + y_n} y_n \mathrm{e}^{-d-k(x_n+y_n)} \end{cases} \tag{1}$$

当两类蚊子的数量较小时，它们的交配率不再是常数，而是与两类蚊子的数量和成正比，这样两类蚊子相互作用的数学模型便为

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a_1 x_n + b_1 y_n) x_n \mathrm{e}^{-d-k(x_n+y_n)} \\ y_{n+1} = (a_2 x_n + b_2 y_n) y_n \mathrm{e}^{-d-k(x_n+y_n)} \end{cases} \tag{2}$$

在模型(1)和(2)中，参数 d 表示两类蚊子的自然死亡率，k 为两类蚊子的容量参数，a_1 和 a_2 分别表示一个野生蚊子在与野生蚊子或转基因蚊子交配后的生育率，b_1 和 b_2 分别表示一个转基因蚊子在与野生蚊子或转基因蚊子交配后的生育率，这些参数均为正的。

收稿日期：2005－09－27
基金项目：国家自然科学基金资助项目(30670486；10671209)
作者简介：李建全(1965－)，男，山西万荣人，教授，博士，主要从事微分方程定性理论及其应用、生物数学研究.

对于模型(1)和(2)，容易知道点 (0, 0)均为不动点. 同时，$x_n=0(y_n=0)$意味着第 n 代野生蚊子(转基因蚊子)不存在，于是假设 $x_n>0$ 和 $y_n>0$。由式(1)和式(2)均可得到差分方程

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=k\frac{\alpha x_n+y_n}{\beta x_n+y_n}\cdot\frac{x_n}{y_n} \tag{3}$$

其中 $k=\frac{b_1}{b_2},\alpha=\frac{a_1}{b_1},\beta=\frac{a_2}{b_2}$，下面将主要讨论差分方程(3)。

2 数量比的变化分析

令 $u_n=x_n/y_n$，由式(3)可得：

$$u_{n+1}=k\frac{\alpha u_n+1}{\beta u_n+1}u_n=f(u_n) \tag{4}$$

直接计算可知：差分方程(4)总有零不动点 $P_0:u=0$。同时，当$(1-k)(\alpha k-\beta)>0$ 还有正不动点 P^*：$u^*=\frac{1-k}{\alpha k-\beta}$。通过解关于 k 的不等式 $(1-k)(\alpha k-\beta>0$，也可将正不动点 P^* 的存在条件写为：$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$ 或 $1<k<\frac{\beta}{\alpha}$。由于$f'(u)=k\frac{\alpha\beta u^2+2\alpha u+1}{(\beta u+1)^2}$，所以在零不动点 P_0 和正不动点 P^* 处分别有$f'(0)=k,f'(u^*)=-\frac{\alpha k^2-2\alpha k+\beta}{k(\alpha-\beta)}$。

根据差分方程理论[5]：若在不动点$\bar{u}$处有$|f'(\bar{u})|<1$，则该不动点是局部渐近稳定的；若$|f'(\bar{u})|>1$，则该不动点是不稳定的，可以得到：

定理 1 对于方程(4)，零不动点 P_0 当 $k<1$ 时是局部稳定的，当 $k>1$ 时是不稳定的；正不动点 P^* 当 $\frac{\beta}{\alpha}<k<1$ 时是不稳定的，当 $1<k<\frac{\beta}{\alpha}$ 时是局部稳定的。

证明 P_0 的稳定性易知，故略去证明。

由于$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$ 意味着$(1-k)(\alpha k-\beta)>0$ 和$\beta<\alpha$，同时 $(1-k)(\alpha k-\beta)>0$ 又意味着 $-\alpha k^2+2\alpha k-\beta>k(\alpha-\beta)$，因此，当 $\frac{\beta}{\alpha}<k<1$ 时，$-\frac{\alpha k^2-2\alpha k+\beta}{k(\alpha-\beta)}>1$ 即 $f'(u^*)>1$，所以正不动点 P^* 当 $\frac{\beta}{\alpha}<k<1$ 时是不稳定的。

当 $1<k<\frac{\beta}{\alpha}$时，同样有 $-\alpha k^2+2\alpha k-\beta>k(\alpha-\beta)$。由于$\alpha<\beta$，所以$f'(u^*)<1$。另一方面，易知当 $\alpha<\beta$ 时函数 $h(k)=\alpha k^2+(\beta-3\alpha)k+\beta$ 在 $(1,\frac{\beta}{\alpha})$上是单调递增的，又 $h(1)=2(\beta-\alpha)>0$，所以当 $1<k<\frac{\beta}{\alpha}$时 $h(k)>0$，这意味着 $f'(u^*)>-1$。因此，当 $1<k<\frac{\beta}{\alpha}$ 时$|f'(u^*)|<1$，即正不动点 P^* 当 $1<k<\frac{\beta}{\alpha}$时是局部稳定的。

定理 1 证毕。

进一步，可得方程(4)的全局动力学性态：

定理 2 1) 当 $k<\frac{\beta}{\alpha}<1$ 时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；当$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 对于 $u_0<u^*$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$ 对于 $u_0>u^*$；当$\frac{\beta}{\alpha}<1<k$ 时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$。

2) 当 $k<1<\frac{\beta}{\alpha}$时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；当 $1<k<\frac{\beta}{\alpha}$时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u^*$；当 $1<\frac{\beta}{\alpha}<k$ 时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$。

证明 (i) 当$\frac{\beta}{\alpha}<1$ 时，由方程(4)有 $u_{n+1}=\frac{\beta}{\alpha k}\cdot\frac{u_n+1/\alpha}{u_n+1/\beta}u_n<\frac{\alpha k}{\beta}u_n$。因此，$u_n<\left(\frac{\alpha k}{\beta}\right)^n u_0$。当 $k<\frac{\beta}{\alpha}$时，$\frac{\alpha k}{\beta}<1$，所以当 $k<\frac{\beta}{\alpha}<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

(ii) 当$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$时,$u^*>1$于是

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(\alpha k-\beta)(u_n-u^*)}{(\beta u_n+1)}u_n \tag{5}$$

由于$\alpha k-\beta>0$，所以由式(5)有：如果$u_0<u^*$，则$u_n<u_{n-1}<\cdots<u_1<u_0<u^*$。因此，结合不动点的存在性和$P_0$的局部稳定性可知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。如果$u_0>u^*$，则$u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1>u_0>u^*$。由于当$\alpha>\beta$时，函数$\frac{\alpha u+1}{\beta u+1}$关于$u$单调递增,于是

$$k\frac{\alpha u_n+1}{\beta u_n+1}>k\frac{\alpha u_{n-1}+1}{\beta u_{n-1}+1}>\cdots>k\frac{\alpha u_1+1}{\beta u_1+1}>k\frac{\alpha u_0+1}{\beta u_0+1}$$

进一步,便由$u_{n+1}=k\frac{\alpha u_n+1}{\beta u_n+1}u_n>k\frac{\alpha u_0+1}{\beta u_0+1}u_n$有$u_n>\left(k\frac{\alpha u_0+1}{\beta u_0+1}\right)^n u_0$。又$k\frac{\alpha u_0+1}{\beta u_0+1}>k\frac{\alpha u^*+1}{\beta u^*+1}=1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$。因此，当$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$对于$u_0<u^*$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$对于$u_0>u^*$。

(iii) 当$\frac{\beta}{\alpha}<1$时$u_{n+1}=k\frac{\alpha u_n+1}{\beta u_n+1}u_n>ku_n$。因此$u_n>k^n u_0$，所以当$\frac{\beta}{\alpha}<1<k$时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$。

对于情形$k<1<\frac{\beta}{\alpha}$和$1<\frac{\beta}{\alpha}<k$，证明过程与前边类似，故略去。

当$1<k<\frac{\beta}{\alpha}$时，模型(4)有正不动点u^*，则直接计算可得：

$$u_{n+1}-u^*=\frac{\alpha k u_n+1}{\beta u_n+1}(u_n-u^*)$$

所以$u_n>u^*$对于$u_0>u^*$;$u_n<u^*$对于$u_0<u^*$。

又从方程(5)，当$\alpha k<\beta$时，若$u_n<u^*$，则$u_{n+1}>u_n$;若$u_n>u^*$，则$u_{n+1}<u_n$。因此，由正不动点u^*的存在性以及局部稳定性便有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u^*$。

定理 2 证毕。

再令$v_n=\frac{y_n}{x_n}$，则方程(3)即为

$$v_{n+1}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\beta+v_n}{\alpha+v_n}\cdot v_n=g(v_n) \tag{6}$$

易知方程(6)总有零不动点$\overline{P_0}:v=0$。同时，当$(1-k)(\alpha k-\beta)>0$时方程(6)还有正不动点$\overline{P^*}:v^*=\frac{\alpha k-\beta}{1-k}=\frac{1}{u^*}$。由$g'(v)=\frac{1}{k}\frac{v^2+2\alpha v+\alpha\beta}{(\alpha+v)^2}$可得：

$$g'(0)=\frac{\alpha}{\beta k},g'(v^*)=-\frac{\alpha k^2-2\alpha k+\beta}{k(\alpha-\beta)}=f'(u^*)$$

类似于定理 1 和定理 2，对于方程(6)有

定理 3　对于方程(6)，零不动点$\overline{P_0}$当$\beta<\alpha k$时是局部稳定的，当$\beta>\alpha k$时是不稳定的；正不动点$\overline{P^*}$当$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$时是不稳定的，当$1<k<\frac{\beta}{\alpha}$时是局部稳定的。

定理 4　1) 当$k<\frac{\beta}{\alpha}<1$时$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\infty$；当$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$，对于$v_0<v^*$，$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\infty$对于$v_0>v^*$；当$\frac{\beta}{\alpha}<1<k$时$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$。

2) 当$k<1<\frac{\beta}{\alpha}$时,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\infty$；当$1<k<\frac{\beta}{\alpha}$时,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=v^*$；当$1<\frac{\beta}{\alpha}<k$时,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$。

事实上，根据方程(4)和方程(6)的关系，方程(6)的零不动点对应于方程(4)的无穷不动点，方程(6)的无穷不动点对应于方程(4)的零不动点，方程(6)的正不动点对应于方程(4)的正不动点. 于是可将定理

1 至定理 4 的结论归纳为如表 1 所示。

表 1 野生蚊子与转基因蚊子的数量比变化趋势

$k<\frac{\beta}{\alpha}<1$	$\frac{\beta}{\alpha}<k<1$	$\frac{\beta}{\alpha}<1<k$	$k<1<\frac{\beta}{\alpha}$	$1<k<\frac{\beta}{\alpha}$	$1<\frac{\beta}{\alpha}<k$
$u_n\to 0$	$u_n\to 0$ 对于 $u_n<u^*$	$u_n\to\infty$	$u_n\to 0$	$u_n\to u^*$	$u_n\to 0$
$u_n\to\infty$	$u_n\to 0$ 对于 $u_n>u^*$	$u_n\to 0$	$u_n\to\infty$	$u_n\to u^*$	$u_n\to 0$

3 结束语

上节表格总结了野生蚊子与转基因蚊子的数量比变化的各种最终情形,又由定理 2 的证明过程可知,数列 u_n 与 v_n 的变化均呈现单调性。由于 $u_n\to 0(v_n\to 0)$ 意味着野生蚊子(转基因蚊子)将最终灭绝,$u_n\to u^*$ 意味着两类蚊子将最终以一定比例共存,因此,为了达到预防和控制疟疾、登革热等疾病的传播,需要采取改善环境的措施,以使参数满足 $k<1<\frac{\beta}{\alpha}$,或 $k<1<\frac{\beta}{\alpha}$,或 $\frac{\beta}{\alpha}<k<1$ 且 $u_0<u^*$,其中 $u_0<u^*$ 的满足可通过先喷洒灭蚊剂等方法来降低野生蚊子的数量,然后再投放转基因蚊子的方式来取得。只有这样,才可以将野生蚊子彻底灭绝。另外,在一些实际情况下,野生蚊子种群数量极大,而转基因蚊子数量相对较小,对此情形,将另做讨论。

参考文献:

[1] Ghosh A K, Ribolla P E M, Jacobs - Lorena M. Targeting Plasmodium Ligands on Mosquito Salivary Glands and Midgut with a Phage Display Peptide Library [J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 2001, 98:13278 - 13283.

[2] Ito J, Ghosh A, Moreira L A, et al. Transgenic Anopheline Mosquitoes Impaired in Transmission of a Malaria Parasite[J]. Nature, 2002, 417: 452 - 454.

[3] Lycett G J, Kafatos F C. Anti - Malarial Mosquitoes? [J]. Nature, 2002, 417: 387 - 389.

[4] Li J. Simple Mathematical Models for Interacting Wild and Transgenic Mosquito Populations [J]. Mathematical Biosciences, 2004, 189:39 - 59.

[5] McCluskey C C, Muldowney J S. Bendixson - Dulac Criteria for Difference Equations [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 1998, 10: 567 - 575.

[6] 李建全,王拉娣,杨友社. 两类含非线性传染率的传染病模型的定性分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2004, 5(1):84 - 88.

[7] 李建全,杨友社. 一类带有确定隔离期的传染病模型的稳定性分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2003, 4(3): 83 - 86.

(编辑:田新华)

Analysis of a Class of Difference Equation for Ratio between the Numbers of Population

L[Jian -quan, YANG Ya - li,ZHANG Xiao shui

(The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract :The difference equation for interaction between wild and transgenic mosquitoes is established. The necessary and sufficient conditions that those two types of mosquitoes extinct respectively or coexist with each other are obtained, and the changing tendency of ratio between their numbers is found by means of qualitative theory of difference equations.

Key words: difference equation ; fixed point; stability