随机 Petri 网对装备维修保障的建模与分析

刘　勇，　武　昌，　陈校平

（西北工业大学电子信息学院，陕西　西安　710072）

摘　要：利用 Petri 网与马尔可夫链的同构关系，采用 Petri 网与马尔可夫链理论相结合的维修保障系统性能分析方法，对系统性能有效评估提供了理论依据。通过两个不同实例分析了系统状态空间、各状态在稳态下的期望概率、系统可靠性和维修人员的工作强度。实例表明，相比传统的建模方法，在分析装备维修保障各状态间的逻辑关系和系统动态过程中，随机 Petri 网具有显著的有效性和优越性。

关键词：随机 Petri 网；维修保障；Markov 过程；建模与分析

中图分类号：TN919　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-3516(2007)02-0043-03

基于 Petri 网建模方法对于描述系统动态特性、测试业务流程变化情况非常方便，它能够很好地描述维修保障系统中的人员流、装备流。应用 Petri 网进行维修保障的业务过程仿真、建模及动态分析将十分方便。然而，普通的 Petri 网主要是对确定性事件进行建模及分析，对维修保障过程中变量的随机概率分布缺乏有效的描述，模型与实际系统差距较大。

本文采用随机 Petri 网（Stochastic Petri Nets，SPN）建立装备维修保障系统模型，利用 SPN 分析离散事件系统各状态间的逻辑关系的有效性和优越性，考虑战场维修过程中的各种随机因素，利用马尔可夫链的计算特性，分析维修过程中的一些动态特性，最后通过实例分析，得出维修保障系统工作的各种状态、可靠性和维修人员的工作强度、运作效率等定量指标。

1　随机 Petri 网

定义：随机 Petri 网由一个八元数组构成，记为 $SPN=(P,T,I,O,F,W,M_0,\lambda)$，其中 (P,T,I,O,F,W,M_0) 是一个 PN 系统，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$ 是变迁平均实施速率的集合[1]。

λ_i 是变迁 $t_i \in T$ 的平均实施速率，表示在可实施的情况下，单位时间内平均实施的次数，单位是次数/单位时间。平均实施速率为 $\tau_i=1/\lambda_i$，称为变迁 t_i 的平均实施时间或平均延时，即平均服务时间。实施速率可能依赖于标识，是标记函数。例如，在一个变迁表示多个任务或进程并发执行时，变迁 t_i 的平均实施速率就与任务个数（或进程个数）成正比。在 SPN 中，每一个时间变迁可用来模拟分布式系统中某人活动的执行，从时间的角度来看，所有的活动的执行可以是并行的，直到所有的活动执行完毕为止。

在利用 SPN 对系统性能模型进行分析时，主要将 SPN 同构为一个连续时间的马尔可夫链（CTMC），然后利用 CTMC 的有关知识进行系统性能分析。Petri 网所有位置的 Token 数组成的标识向量称为网的一个状态，标识向量即状态用其序号表示，这些序号所构成的集合为 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$，设 $X(t)$ 是以 Ω 为状态空间的时齐 Markov 过程[2]，其中 $p_i(t)=P[X(t)=i]$ 指系统在时刻 t 处于状态 i 的概率；$p_{ij}(t)=P[X(s+t)=j/X(s)=i]$ 表示系统在任意时刻 s 处于状态 i 条件下时刻 $s+t$ 转移到状态 j 的条件概率；系统在时刻 t 状态空间的分布律用向量 $\boldsymbol{P}(t)=(p_1(t),p_2(t),\cdots,p_n(t))$ 来表示，系统的状态转移概率矩阵为：

收稿日期：2006－07－17
作者简介：刘　勇（1976－），男，湖南衡阳人，博士生，主要从事空军通信导航装备建模与评估研究；
武　昌（1944－），男，辽宁沈阳人，教授，博士生导师，主要从事空军通信导航装备建模与评估研究.

$$A(t)=\begin{bmatrix} p_{1,1}(t) & \cdots & p_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1}(t) & \cdots & p_{n,n}(t) \end{bmatrix}$$

显然,有

$$P(s+t)=P(s)A(t)$$

若系统是不可约且是标准的,则其极限分布存在且满足:$\prod Q=0$, $\sum_{i=1}^{n}\pi_i=1$

式中:$\prod$ 是系统状态空间的极限分布律,即各状态的稳态概率;$\prod=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)$;$Q$ 为状态转移密度矩阵,定义一个 $n\times n$ 的无穷小生成元(或说转移矩阵)$Q=[q_{i,j}]$,$1\leqslant i,j\leqslant n$。

$$\prod=\lim_{t\to\infty}p(t);\qquad Q=\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=(q_{i,j})_{n\times n}$$

$$\pi_i=\lim_{t\to\infty}p(t);\quad q_{i,j}=\lim_{t\to\infty}\frac{p_{i,j}(t)}{t},(j\neq i);\quad q_{i,i}=\lim_{t\to\infty}\frac{p_{i,j}(t)-1}{t}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

在稳定状态下,系统状态 i 的期望频率 g_i 表示单位时间内停留在(或进入、或离开)状态 i 的期望次数,系统时间停留在状态 i 的平均持续时间称为期望持续时间 T_i,T'_i 表示不在状态 i 的平均持续时间,$T_{ci}=T_i+T'_i$ 称为状态 i 的期望周期,显然有 $g_i=1/T_{ci}$。同时乘以 T_i 得:

$$g_iT_i=T_i/T_{ci}=\pi_i\quad;\quad g_i=T_i/T_i\quad;\quad T_i=T_i/g_i$$

$g_{i,j}$ 表示单位时间从状态 i 到状态 j 的直接转移期望次数,显然有:

$$g_{i,j}=\lim_{t\to\infty}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}p[X(t+\Delta t)=j,X(t)=i]=q_{i,j}\pi_i$$

则有

$$g_i=\sum_{j\neq i}g_{i,j}=\pi_i\sum_{j\neq i}q_{i,j}\quad;\quad T_i=T_i/g_i=1/\sum_{j\neq i}g_{i,j}=1/q_{i,i}$$

2 装备维修保障过程的 SPN 模型及分析

实例:在平时的装备保障过程中,通常一个系统由两个相同装备并联、一个维修人员组成,假设装备寿命分布为 $L(t)=1-e^{-\lambda t}$,故障后修理时间分布为 $M(t)=1-e^{-\mu t}$,则系统的随机 Petri 网模型如图 1 所示。其中 p_1 和 p_2 分别表示装备甲和乙工作正常,p_3 表示维修人员空闲,p_4 和 p_5 表示装备甲和乙故障待修,t_1 和 t_3 代表装备甲和乙发生故障,t_2 和 t_4 代表装备甲和乙故障被修好[3]。假设 $\lambda=0.005\mathrm{h}^{-1}$,$\mu=0.06\mathrm{h}^{-1}$

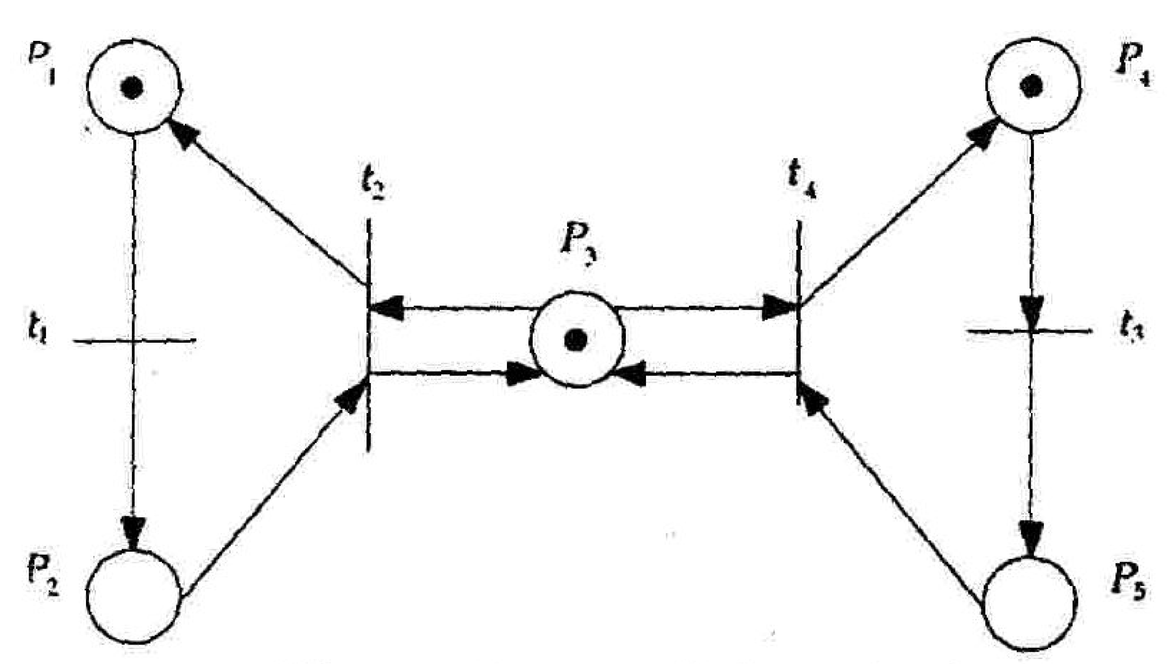

图 1 两装备并联时维修保障的 SPN 模型

系统在开始运行时初始标识 $M_0=(1,0,1,1,0)$ 表示装备都正常工作,维修人员空闲。规定装备发生故障后若维修人员空闲则立即进行修理。因此,网中所描述的一些状态是瞬时状态,这类状态不予考虑,这样系统运行过程中共有如下标识的 4 种状态:

(1,0,1,1,0)、(0,1,1,1,0)、(0,1,1,0,1)、(1,0,1,0,1)。

由于系统变迁的启动所需要时间服从指数分布,由指数分布的无记忆性可知,系统的状态转移是 Markov 过程,则系统的稳态概率分布为 $\Pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$ 。由此可得:

$$Q=\begin{bmatrix} -2\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -2\mu & \mu \\ \mu & 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) \end{bmatrix}\quad;\quad \Pi Q=\begin{cases} -2\lambda\pi_1+\mu\pi_2+\mu\pi_4=0 \\ \lambda\pi_1-(\lambda+\mu)\pi_2+\mu\pi_3=0 \\ \lambda\pi_2-2\mu\pi_3+\lambda\pi_4=0 \\ \lambda\pi_1+\mu\pi_3-(\lambda+\mu)\pi_4=0 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \end{cases}$$

解上述方程组可得:$\pi_1=8.509\times10^{-1}$,$\pi_2=7.10\times10^{-2}$,$\pi_3=7.0\times10^{-3}$,$\pi_4=7.10\times10^{-2}$。

由于两装备组成的是并联系统,求得稳态下的状态概率后,即可求得以下可靠性参数[4]。

系统的可靠性参数:　　$R=\pi_1+\pi_2+\pi_4=9.929\times10^{-1}$

平均工作时间:　　$T_W=(-q_{11})^{-1}+(-q_{22})^{-1}+(-q_{44})^{-1}=108(\mathrm{h})$

维修人员工作强度:　　$R=\pi_2+\pi_3+\pi_4=1.49\times10^{-1}$

3 结　论

从实例可以看出,在平时维修保障过程中,由一个维修人员对两台同样装备实施保障,系统的稳定性好,可靠性高。可见用随机 Petri 网来给装备维修保障进行建模,能够方便地确定系统的状态空间的各个状态,正确地导出系统的状态空间,清楚地描述了系统的各个状态间的逻辑关系和动态变化过程。因此,用随机 Petri 网比传统的状态空间法更实用、更简便、更清晰、可读性更强,尤其是保证状态空间的确定、分析状态空间的逻辑关系动态运行过程等方面,具有很大的优越性[5]。

参考文献:

[1] 林　闯. 随机 Petri 网和系统性能评价[M]. 北京:清华大学出版社,2005.

[2] Peter J H. Estimation Methods for Nonregenerative Stochastic Petri Nets [J]. IEEE Trans, Software Engineering, 1999, 25(3): 218-236.

[3] 马　麟,吕　川. Petri 网在维修工作分析中的应用研究 [J]. 北京航空航天大学学报,2004,30(3):249-253.

[4] 郭永基. 可靠性工程原理[M]. 北京:清华大学出版社,2002.

[5] WernKueir Jehng, ShihSen Peng, MengChu Zhou. Petri Net Construction and Analysis of Automated Sequential Manufacturing Systems Systems[J]. IEEE International Conference, 2001, (4): 7-10.

(编辑:门向生)

Modeling and Analysis of Equipment Maintenance Support Based on Stochastic Petri Net

LIU Yong, WU Chang, CHEN Xiao-ping

(College of Electronics and Information , Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, Shaanxi, China)

Abstract: The modeling of the system is discussed on Stochastic Petri net (SPN) with the transition subjected to Markov process. The determination of state space, expectation probability and duration of each state, the reliability of the system and the working intensity of maintainers are analyzed through examples. Compared with traditioual modeling methods, in the course of analyzing the state space and logic relation among the states and the dynamic process of the system, SPN is discovered to be more effective than and superior to the traditional methods.

Key words: stochastic Petri net; maintenance support; Markov Process; modeling and analyzing