

具有较大围长的 $(n, 3, k)$ LDPC 码构造方法

钟永信¹, 史波², 杜兴民¹

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 西北工业大学, 陕西 西安 710072)

摘要:消除短环已成为提高低密度奇偶校验(LDPC)码译码性能的重要措施。基于不含短环的 $(n, 2, k)$ 规则 LDPC 码,提出了一种更具实用价值的 $(n, 3, k)$ 规则 LDPC 码的构造方法。利用该方法可以完全消除 $(n, 3, k)$ 规则 LDPC 码中存在的4-环、6-环及8-环。在AWGN信道下仿真结果证明了该方法的有效性,所产生围长为10的码达到了非常优越的性能。

关键词:LDPC 码;容许斜度对;环;围长;和-积译码

中图分类号: TN91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2007)01-0081-04

1962年 Gallager 提出了一种基于稀疏校验矩阵的线性码,即低密度奇偶校验(LDPC)码其应用越来越广泛^[1-2]。LDPC 码同 Turbo 码一样通常采用迭代译码算法^[3-4],在此过程中短环的存在使得节点传递出去的消息经过几轮迭代后又传递回其本身,造成了信息的重复利用,降低了译码性能。从代数构造法到启发式搜索法,学者们提出了许多消除短环的方法。文献[5]中提出了不含短环的 $(n, 2, k)$ 规则 LDPC 码的构造方法,但从其仿真结果我们发现 $(n, 2, k)$ 码性能较差,而 $(n, 3, k)$ 规则 LDPC 码则具有较优越的性能^[6],因此本文在此基础上提出了不含短环的 $(n, 3, k)$ 规则 LDPC 码的构造方法。采用该方法产生的 $(n, 3, k)$ LDPC 码消除了其对应因子图上长度为4,6和8的环,性能明显优于 $(n, 2, k)$ 码和随机产生的 LDPC 码,更适于实际应用。

预备知识^[5]:设 $H_{v \times n}$ 为 LDPC 码的校验矩阵,其 v 个校验节点的用集合 X 表示。集合 X 中某两节点连线对应于校验矩阵某一列中两个“1”元素相连,这种由集合 X 中点相连而成的图称为构造图(structure graph)。

令 $v=3p$, v 为校验节点数量且为3的倍数。将点集 $X = \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_p\}$ 分成节点数量同为 p 的3个子集 $X_1 = \{a_1, \dots, a_p\}$, $X_2 = \{b_1, \dots, b_p\}$ 和 $X_3 = \{c_1, \dots, c_p\}$,每个子集中的点按垂直方向排列。

定义1 斜度:任取子集 X_1, X_2, X_3 中的2个子集如 X_1, X_2 则连接两个节点 $a_i \in X_1, b_j \in X_2$ 的边的斜度定义为 $s = j - i$ 。

定义2 容许斜度对:当且仅当 $s_i = -\text{sgn}(s_j) \cdot (p - |s_j|)$ 时,一个斜度对 (s_i, s_j) 被称为“容许斜度对”。这里特别指出斜度 $s=0$ 自身就构成了一个容许斜度对,相当于斜度对 $(0, 0)$ 。

定义3 容许斜度集:斜度对构成的集合,若集合里所有斜度对都为容许斜度对,则该集合称为“容许斜度集”。

1 矩阵分裂方法

设要构造一个长度为 $n(n=kp, p \in N)$ 的 $(3, k)$ 规则 LDPC 码,其校验矩阵 H 可以分裂为 $3k$ 个 $p \times p$ 的子矩阵,即:

收稿日期:2006-04-05

基金项目:国防科技重点基金(51473020105JB3202)

作者简介:钟永信(1980-),男,浙江台州人,硕士生,主要从事保密通信与抗干扰技术研究。

$$H = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0,0} & H_{0,1} & \cdots & H_{0,k-1} \\ H_{1,0} & H_{1,1} & \cdots & H_{1,k-1} \\ H_{2,0} & H_{2,1} & \cdots & H_{2,k-1} \end{bmatrix}$$

其中 $H_{i,j}$ ($0 \leq i < 3, 0 \leq j < k$) 均是一个 $p \times p$ 单位阵或单位阵的循环移位, 为便于下文说明, 此处可选定 $H_{0,j}$ ($0 \leq j < k$)、 $H_{1,0}$ 、 $H_{2,0}$ 为 $p \times p$ 的单位阵。

根据上一节介绍校验矩阵 H 对应于校验节点集 X , 则 H_0, H_1, H_2 分别对应于 3 个节点子集 $X_1 = \{a_1, \dots, a_p\}$, $X_2 = \{b_1, \dots, b_p\}$ 和 $X_3 = \{c_1, \dots, c_p\}$, 这样节点子集 X_1, X_2, X_3 两两之间均构成一个容许斜度集。设 X_2 与 X_1 之间构成的容许斜度集为 $A = \{(s_{1,1}, s_{1,2}), \dots, (s_{1,2k-1}, s_{1,2k})\}$, X_3 与 X_1 构成的容许斜度集为 $B = \{(s_{2,1}, s_{2,2}), \dots, (s_{2,2k-1}, s_{2,2k})\}$, X_3 与 X_2 之间构成的容许斜度集为 $C = \{(s_{3,1}, s_{3,2}), \dots, (s_{3,2k-1}, s_{3,2k})\}$ 。根据校验矩阵部分子矩阵的选定, 这里有: $(s_{l,1}, s_{l,2}) = (0, 0)$, 其中 $l = 1, 2, 3$; $-p < s_{1,2j-1} < 0$, $-p < s_{2,2j-1} < 0$, 其中 $1 \leq j \leq k$, 并且根据斜度的定义满足关系: $s_{1,2j} = p + s_{1,2j-1}$, $s_{2,2j} = p + s_{2,2j-1} < 0$, 其中 $1 \leq j \leq k$; 进一步观察我们发现只要斜度集 A, B 确定, C 也随之确定, 并且满足关系: $s_{1,2j-1}, s_{3,2j} = -\text{sgn}(s_{3,2j-1}) \cdot (p - |s_{3,2j-1}|)$, 其中 $1 \leq j \leq k$ 。下面我们就具体来说明如何利用构造图来选取斜度集以消除各种环的影响。

2 围长为 6, 8, 10 的 $(n, 3, k)$ LDPC 码

2.1 围长为 6 的 $(n, 3, k)$ LDPC 码

文献[5]已证明了 $(n, 2, k)$ LDPC 码即子集 X_1, X_2, X_3 中的任意两个子集之间不存在 $(4m+2)$ 环, 其中 $m = 1, 2, \dots$ 。换句话说, 任意两子集之间只可能存在 4-环、8-环和 12-环(此文最多考虑到 12-环), 而 3 个子集 X_1, X_2, X_3 都经过的最小环为 6-环(3 个子集中各取 1 个节点, 之间最少有 3 条边相连, 即 6-环), 其次还存在 8-环、10-环和 12-环。

因此要得到围长为 6 的 $(n, 3, k)$ LDPC 码, 只要消除 X_1, X_2, X_3 中的任意 2 个子集之间存在的 4-环即可。在构造图上 4-环产生于 2 子集中的 2 个节点之间有两条重叠的边相连, 如图 1 所示; 而对应于斜度集每 1 个 4-环可以表述为: 在 A, B, C 的任意一个斜度集中有相同的斜度存在。所以 $(n, 3, k)$ LDPC 码不含有长度为 4 的环, 斜度集需满足:

$$i \neq j, s_{l,i} \neq s_{l,j} \quad (1)$$

其中 $l = 1, 2, 3; 2 \leq i \leq 2k, 2 \leq j \leq 2k$ 。

只要斜度集的选取满足式(1)的不等约束, 那么其相应的 $(n, 3, k)$ LDPC 码的围长为 6。

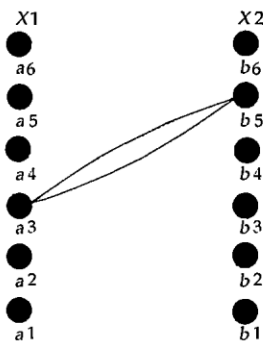


图 1 4-环构造图

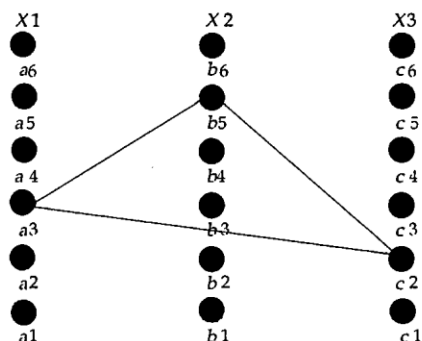


图 2 6-环的三子集构造图

2.2 围长为 8 的 $(n, 3, k)$ LDPC 码

要得到围长为 8 的 $(n, 3, k)$ LDPC 码, 只需在消除 4-环的基础上继续消除 6-环即可。而由上一节我们知道在构造图上 6-环产生于 X_1, X_2, X_3 3 个子集各取一个节点, 3 个点两两相连, 从而形成如图 2 中的三角形结构。对应于斜度集每一个 6-环可以表述为: 在 A, B, C 中各取出不对应(斜度集 A, B, C 中分别取第 i, j, l 个斜度对, 要求 $i \neq j \neq l$) 的 1 个斜度对, 再分别从这 3 个斜度对中各取出 1 个斜度, 取出的 3 个斜度中最大的斜度绝对值等于较小的 2 个斜度绝对值之和。所以 $(n, 3, k)$ LDPC 码不含有长度为 6 的环, 斜度集需满足: 当 $i \neq j \neq l$ 时, 有式(2)。式(2)中 $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, 1 \leq l \leq k; x = 1, 2, y = 1, 2, z = 1, 2$ 。

$$2\max\{|s_{1,2(i-1)+x}|, |s_{2,2(j-1)+y}|, |s_{3,2(l-1)+z}|\} \neq |s_{1,2(i-1)+x}| + |s_{2,2(j-1)+y}| + |s_{3,2(l-1)+z}| \quad (2)$$

只要斜度集的选取满足式(1)、(2)的不等约束,那么其相应的 $(n,3,k)$ LDPC 码的围长为 8。

2.3 围长为 10 的 $(n,3,k)$ LDPC 码

要得到围长为 10 的 $(n,3,k)$ LDPC 码,需进一步消除所有的 8-环。同样从第 2.1 节我们知道经过 3 子集 X_1, X_2, X_3 可能存在 8-环,还有 X_1, X_2, X_3 中任意 2 子集之间可能存在着 8-环。图 3 给出了 8-环的 3 子集构造图,图中 X'_1, X'_3 分别代表 X_1, X_3 的平行移位。

2.3.1 消除经过 3 子集 X_1, X_2, X_3 的 8-环

这种情况下的 8-环在构造图上产生于 X_1, X_2, X_3 3 子集之间存在着四边形结构,如图 3 所示,给出了 4 条边之间具有不同倾斜关系的 3 种四边形结构;而对应到斜度集(无论哪种四边形)每一个 8-环均可以表述为:在 A, B, C 的任意 2 个斜度集中,第 1 次从其中一个斜度集取出 2 个不同的斜度对,然后分别从这两个斜度对中各取出 1 个斜度;第 2 次则从另一个斜度集中取出 2 个不同的斜度对,同样分别从这两个斜度对中各取出 1 个斜度;第 1 次取出的 2 个斜度之差的绝对值等于第 2 次取出的 2 个斜度之差的绝对值。所以不含有经过 3 子集 X_1, X_2, X_3 的 8-环,斜度集需满足:

$$\begin{cases} |s_{1,2(i-1)+x} - s_{1,2(j-1)+y}| \neq |s_{2,2(g-1)+r} - s_{2,2(h-1)+s}| \\ |s_{1,2(i-1)+x} - s_{1,2(j-1)+y}| \neq |s_{3,2(g-1)+r} - s_{3,2(h-1)+s}| \\ |s_{2,2(i-1)+x} - s_{2,2(j-1)+y}| \neq |s_{3,2(g-1)+r} - s_{3,2(h-1)+s}| \end{cases} \quad (3)$$

其中 $1 \leq i \leq k-1, i+1 \leq j \leq k; 1 \leq g \leq k-1, g+1 \leq h \leq k; x=1,2, y=1,2, r=1,2, s=1,2。$

2.3.2 消除 X_1, X_2, X_3 中任意 2 子集之间的 8-环

这种情况下的 8-环在构造图上产生于 X_1, X_2, X_3 及 X_1, X_3 两子集之间存在着如图 3 中的双剪刀结构^[5](double scissors structure),该结构相当于四边形随轴 X_1, X_2 或 X_3 的一次翻折所得;因此对应于斜度集的选取上类似 2.3 节中的选取方式,每一个 8-环可以表述为:在 A, B, C 的任意 1 个斜度集中,第 1 次从该斜度集取出 2 个不同的斜度对,然后分别从这 2 个斜度对中各取出 1 个斜度;第 2 次依然从该斜度集中取出 2 个不同的斜度对,再次分别从这 2 个斜度对中各取出 1 个斜度;第一次取出的两个斜度之差的绝对值等于第二次取出的 2 个斜度之差的绝对值。即

$$|s_{l,2(i-1)+x} - s_{l,2(j-1)+y}| \neq |s_{l,2(g-1)+r} - s_{l,2(h-1)+s}| \quad (4)$$

其中 $l=1,2,3; 1 \leq i \leq k-1, i+1 \leq j \leq k; 1 \leq g \leq k-1, g+1 \leq h \leq k; x=1,2, y=1,2, r=1,2, s=1,2。$

只要斜度集的选取满足式(1) - (4)的不等约束,那么其相应的 $(n,3,k)$ LDPC 码的围长为 10。

3 仿真与讨论

上文采用构造图的分析方法,具体给出了消除 4-环,6-环,8-环的 $(n,3,k)$ LDPC 码的不等约束式。根据(1)、(2)、(3)、(4)式,并通过计算机搜索,选取了围长为 10 的(1 008, 3, 6) LDPC 码的斜度集:

$$A = \{(0,0), (-1,167), (-122,46), (-35,133), (-133,37), (-14,154)\}$$

$$B = \{(0,0), (-152,16), (-86,82), (-142,26), (-64,104), (-97,71)\}$$

在高斯信道下,采用 BPSK 调制方式,迭代译码次数为 50,我们运用和-积译码算法^[3]对上面选取的(1 008, 3, 6) LDPC 码和随机构造的(1 008, 3, 6) LDPC 码进行了 Matlab 软件仿真,给出的性能曲线如图 4 所示。同时,为便于说明本文所构造的 $(n,3,k)$ LDPC 码的优越性能,特引用文献[5]中围长为 16 的(4 368, 2, 4)

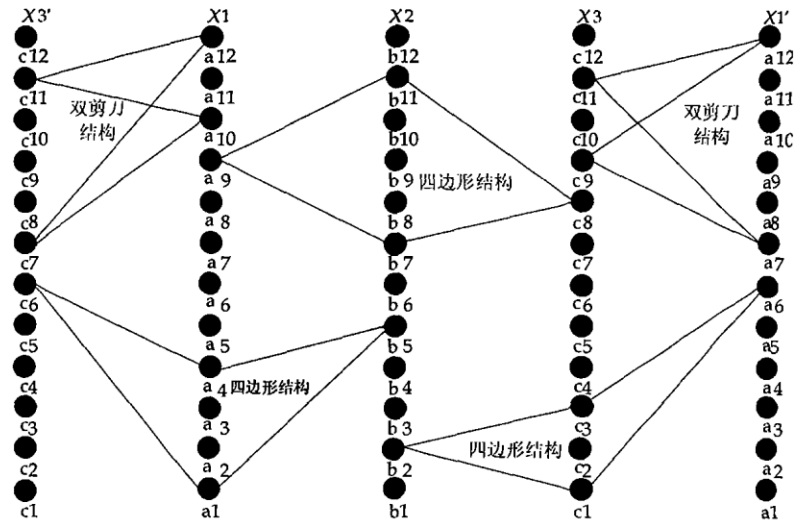


图 3 8-环的三子集构造图

LDPC 码的性能曲线(如图 5)作为比较。从图 4 和图 5 的两组性能曲线中,我们可以得出以下结论:

1) 图 4 中我们可以看出,本文构造的 LDPC 码与同条件下随机构造的 LDPC 码相比,性能上有了显著提高;特别在高信噪比条件下,本文的 LDPC 码在消除 4、6、8 环之后,达到了非常优越的性能。

2) 比较图 4 和图 5 我们发现,本文构造的 $(n, 3, k)$ LDPC 码在相同码率、更短码长的条件下性能仍明显优于文献[5]中构造的 $(n, 2, k)$ LDPC 码,因此本文的 $(n, 3, k)$ 码相对于文献[5]的 $(n, 2, k)$ 码在性能得到明显改善之后,更适于工程应用的要求。

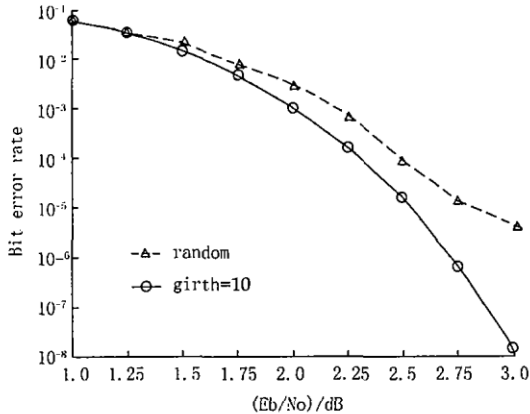


图 4 随机与围长为 10 的(1008, 3, 6) LDPC 码性能比较

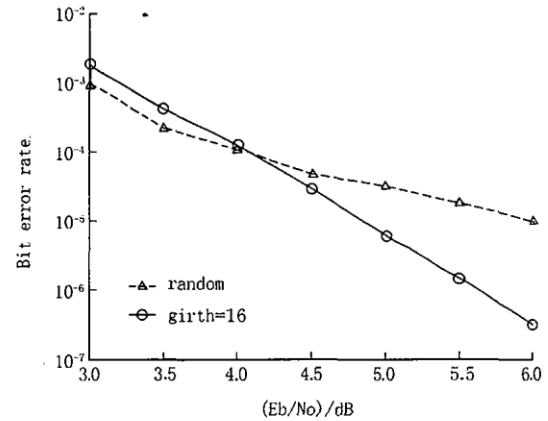


图 5 随机与围长为 16 的(4368, 2, 4) LDPC 码性能比较

4 结束语

本文提出了一种围长为 10 的 $(n, 3, k)$ 规则 LDPC 码的构造方法,在有效地消除了 4、6、8 环之后,性能明显优于随机产生的规则 LDPC 码,在高信噪比的前提下,码的性能是相当突出的。而如何利用构造图的方法来产生性能较好的非规则 LDPC 码仍有待下一步的研究。

参考文献:

- [1] Gallager R G. Low-Density Parity Check Codes[J]. IRE Trans. on Information Theory, 1962, IT-8(3):208-220.
- [2] 李鑫,王红星,许阳. LDPC 码在联合信道编码中的应用[J]. 海军航空工程学院学报, 2006, (2):253-256.
- [3] Hu Xiao-Yu, Eleftheriou Evangelos, Arnold Dieter Michael, et al. Efficient implementations of the Sum-Product Algorithm for Decoding LDPC codes [A]. IEEE GLOBECOM[C]. San Antonio. 2001:1036-1036.
- [4] 闫涛,杜兴民. 基于 Log-Map 算法的 Turbo 码量化分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2005, 6(4):52-54.
- [5] Zhang Haotian, Moura Jos'e M F. The design of structured regular LDPC codes with large girth[J]. IEEE GLOBECOM, 2003: 4022-4027.
- [6] Chung S Y, Richardson T J, Urbanke R L. Analysis of Sum-Product Decoding of Low-Density Parity-Check Codes Using a Gaussian Approximation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2):657-670.

(编辑:姚树峰)

The Design of Structured $(n, 3, k)$ LDPC Codes with Large Girth

ZHONG Yong-xin¹, SHI Bo², DU Xing-min¹

(1. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, Shaanxi, China; 2. Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract: Eliminating short cycles has been an important measure to improve Low Density Parity-Check (LDPC) codes performance, based on regular $(n, 2, k)$ LDPC codes without short cycles, a constructing method of practical regular $(n, 3, k)$ LDPC codes without cycle 4, 6 and 8 is proposed. The simulation results over AWGN channels prove the validity of the method, and the produced codes with girth 10 reach the outstanding performance.

Key words: LDPC codes; admissible slope pair; cycle; girth; sum-product decoding