一种相对隶属度新概念下的模糊数排序方法

宋志华， 张多林， 龚立占
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘　要: 为了解决防空作战辅助决策中模糊数隶属函数在用于模糊数比较时产生的问题,定义了相对隶属度的概念,并且在此基础上定义了模糊数的期望值以及相对隶属度偏差。提出了一种新的基于相对隶属度的模糊数排序方法,算例表明该方法有效可行。

关键词: 模糊数排序;相对隶属度;相对隶属度偏差
中图分类号: O159　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1009 - 3516(2006)06 - 0081 - 03

在现代防空作战辅助决策中,模糊数学得到了广泛的应用。然而,在实践中我们发现,模糊数排序方法有可能产生数值结果与实际决策预测结果不符的情况。到目前为止,已经提出的模糊数排序方法有 20 多种,也有一些实用性、理解性和操作性比较好的模糊数排序方法[1-3]。这些方法大多都是基于模糊数隶属函数的。为了解决传统模糊数排序方法在防空作战辅助决策中可能产生的问题,提出了相对隶属度的概念,并且在此基础上定义了模糊数的期望值以及相对隶属度偏差、提出了一种新的模糊数排序方法。

1　模糊数的相对隶属度

定义 1[3]　设 $\tilde{A}$ 是 R 上的模糊子集,其隶属函数为 $\mu_{\tilde{A}}$。如果 $\tilde{A}$ 满足条件:①对任意 $\alpha \in (0,]$,$\tilde{A}$ 的 α 截集都是凸集;② $\mu_{\tilde{A}}$ 是上半连续函数;③$\tilde{A}$ 的支集是 R 中的有界集,则称 $\tilde{A}$ 是一个模糊数。

定义 2　设 $\tilde{A}$ 是一个模糊数,其隶属函数为 $\mu_{\tilde{A}}$,则我们称 $\mu_{\tilde{A}}(x) / \int_{x \in R} \mu_{\tilde{A}}(x)\,\mathrm{d}x$ 为模糊数 $\tilde{X}$ 的相对隶属度。

对于一个特定的模糊数 $\tilde{A}$ 来说,其隶属度 $\mu_{\tilde{A}}$ 可以反映其内部成员之间的隶属度的大小关系,这是一种横向的比较。但是在涉及 到两个模糊数之间的比较时,由于隶属度定义的标准可能不一样,以及模糊数确定过程中的主观任意性,使得模糊数之间在纵向比较时有可能标准不一。

容易看出,相对隶属度相当于对隶属度作了规范化处理,便于模糊数之间的纵向比较。用相对隶属度代替绝对隶属度,可以尽可能的减少隶属度确定过程中的主观任意性。

2　模糊数的排序

定义 3　设 $\tilde{A} \in N(R)$ 为模糊数。记

$$c_g(\tilde{A}) = \int_{x \in R} g(x) \left(\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\int_{x \in R} \mu_{\tilde{A}}(x)\,\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x \tag{1}$$

式中,$g(x)$ 是 x 的权重函数且要求 $\int_{x \in R} \mu_{\tilde{A}}(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$,则称 $c_g(\tilde{A})$ 为加权期望值。

收稿日期: 2005 - 12 - 28
基金项目: 空军工程大学学术(联合)基金资助项目(KGD - XL02 - 200420)
作者简介: 宋志华(1982 -),男,河北盐山人,硕士生,主要从事防空作战建模与仿真研究;
张多林(1959 -),男,山东菏泽人,教授,博士生导师,主要从事作战指挥及仿真建模研究.

若取 $g(x) = x$，则 $c_g(\tilde{A})$ 可写为

$$c(\tilde{A}) = \int_{x\in R} x\left(\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\int_{x\in R}\mu_{\tilde{A}}(x)\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \tag{2}$$

$c(\tilde{A})$ 就是 $\tilde{A}$ 的期望值，其含义是 $\tilde{A}$ 为“ $c(\tilde{A})$ 左右的数”。也可把 $c(\tilde{A})$ 看作模糊数 $\tilde{A}$ 的重心的横坐标[3]。模糊数的期望值意味着模糊数较大的隶属度在论域内集中的地方，可用来表示模糊数最接近的一个实数。然而，只用期望值还反映不出模糊数的全部信息。传统意义上使用均方差来反映模糊数对期望值的离散程度。但是在作模糊数的排序时，均方差的灵敏性不够，而且有时得出的结果还与我们的常识及习惯不尽相同。

例　设某两次防空作战效能综合评估值分别为 $\tilde{M} = (0,2,4)$，$\tilde{N} = (1,2,3)$，显然有：

$$c(\tilde{M}) = c(\tilde{N}) = 2$$
$$\sigma(\tilde{M}) > \sigma(\tilde{N})$$

从而根据重心法的排序规则有 $\tilde{M} < \tilde{N}$，得到的结果应是第二次作战效能比较高。但是在实际防空作战中，由于决策的模糊性以及防空作战的不确定性，我们认为两次作战效能是相同的。

由于模糊数排序仅对需排序的模糊数进行两两比较，即模糊数的排序具有相对性。因此，在进行模糊数排序时，用模糊数的相对隶属度代替其绝对隶属度，如下，我们定义相对隶属度偏差，它反映了 两个期望值相同模糊数之间相对隶属偏差的大小

定义 4　设 $\tilde{A} \in N(R)$ 及 $\tilde{B} \in N(R)$ 均为模糊数。记

$$\delta(\tilde{A},\tilde{B}) = \int_{x\in R}\left(\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\int_{x\in R}\mu_{\tilde{A}}(x)\mathrm{d}x} - \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{\int_{x\in R}\mu_{\tilde{B}}(x)\mathrm{d}x}\right)(x - c(\tilde{A}))\mathrm{d}x \tag{3}$$

式中 $c(\tilde{A})$ 为 $\tilde{A}$ 的期望值。$\delta(\tilde{A},\tilde{B})$ 反映了模糊数 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 之间的隶属度偏差关系，不妨称其为模糊数 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 相对隶属度偏差。

比较规则如表 1 所示。

表 1　模糊数的比较规则

期望值关系	$c(\tilde{A}) > c(\tilde{B})$	$c(\tilde{A}) < c(\tilde{B})$	$c(\tilde{A}) = c(\tilde{B})$		
相对隶属度偏差	任意	任意	$\delta(\tilde{A},\tilde{B}) > 0$	$\delta(\tilde{A},\tilde{B}) < 0$	$\delta(\tilde{A},\tilde{B}) = 0$
排序结果	$\tilde{A} > \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} > \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{A} = \tilde{B}$

对于三角形模糊数 $\tilde{A} = (l_1,m_1,u_1)$ 及 $\tilde{B} = (l_2,m_2,u_2)$，利用式(2) 与式(3) 可以计算出其各自期望值为

$$c(\tilde{A}) = \frac{(l_1 + m_1 + u_1)}{3} \tag{4}$$ $$c(\tilde{B}) = \frac{(l_2 + m_2 + u_2)}{3} \tag{5}$$

当 $c(\tilde{A}) = c(\tilde{B})$ 时，式(3) 也可写为

$$\delta(\tilde{A},\tilde{B}) = \int_{x\in R}\left(\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\int_{x\in R}\mu_{\tilde{A}}(x)\mathrm{d}x} - \frac{\mu_{\tilde{B}}(x)}{\int_{x\in R}\mu_{\tilde{B}}(x)\mathrm{d}x}\right)(x - c(\tilde{B}))\mathrm{d}x$$

利用式(3) 可计算 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 之间的相对隶属度偏差为

$$\delta(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{(l_1 + m_1 + u_1)(2 - u_1 + l_1)}{12(u_1 - l_1)} - \frac{(l_2 + m_2 + u_2)(2 - u_2 + l_2)}{12(u_2 - l_2)} \tag{6}$$

类似的，对于梯形模糊数 $\tilde{A} = (l_1,m_1,n_1,u_1)$ 和 $\tilde{B} = (l_2,m_2,n_2,u_2)$，利用式(2) 与式(3) 可以计算出 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 各自的期望值及其相对隶属度偏差为

$$c(\tilde{A}) = \frac{(u_1^2 + n_1^2 + u_1n_1 - m_1^2 - l_1^2 - l_1m_1)}{3(u_1 + m_1 - l_1 - m_1)} \tag{7}$$

$$c(\tilde{B}) = \frac{(u_2^2 + n_2^2 + u_2n_2 - m_2^2 - l_2^2 - l_2m_2)}{3(u_2 + m_2 - l_2 - m_2)} \tag{8}$$

$$\delta(\tilde{A},\tilde{B}) = \frac{(u_1^2 + n_1^2 + u_1 n_1 - m_1^2 - l_1^2 - l_1 m_1)(2 - u_1 - n_1 + l_1 + m_1)}{6(u_1 + n_1 - l_1 - m_1)} - \frac{(u_2^2 + n_2^2 + u_2 n_2 - m_2^2 - l_2^2 - l_2 m_2)(2 - u_2 - n_2 + l_2 + m_2)}{6(u_2 + n_2 - l_2 - m_2)} \tag{9}$$

3 算例

1)对于前述例中的两次防空作战的效能综合评估值 $\tilde{M} = (0,2,4) = 0$ 和 $\tilde{N} = (1,2,3)$,利用式(2)可以计算出它们各自的期望值为:$c(\tilde{M}) = c(\tilde{N}) = 2$ 。利用式(3)可以计算出它们的相对隶属度偏差为:$\delta(\tilde{M},\tilde{N})$,即有 $\tilde{M} = \tilde{N}$。

2)国家甲决定从国家乙购买中远程防空导弹。国家甲空军采购组在国家乙提供的4种可售予的防空导弹的相关资料基础上经过计算、分析得到4种中远程防空导弹的综合评价值如表2所示。试确定4种防空导弹的优劣排序。

表2　防空导弹的综合评价值

导弹型号	x_1	x_2	x_3	x_4
综合评价值	$\tilde{M}_1 = (0.14, 0.2, 0.26)$	$\tilde{M}_2 = (0.08, 0.2, 0.32)$	$\tilde{M}_3 = (0.1, 0.36, 0.5)$	$\tilde{M}_4 = (0.09, 0.21, 0.3)$

根据式(2)与式(3)可得防空导弹的期望值及期望值相等的模糊数之间的相对隶属度偏差分别为

$$c(x_1) = 0.2,\quad c(x_2) = 0.2,\quad c(x_3) = 0.32,\quad c(x_4) = 0.2$$

$$\delta(x_1, x_2) = 0, \delta(x_1, x_4) = -0.3261$$

根据表1提出的比较规则可以看出,4种防空导弹的优劣排序为

$$\tilde{x}_3 > \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 > \tilde{x}_4$$

4 结束语

本文在定义了相对隶属度的概念之后,提出了一种新的模糊数排序方法。此方法解决了传统排序方法在防空作战辅助决策中可能产生的问题,比较直观和容易理解,计算也更加简便,得出的结果也更加符合人们的常识。

参考文献:

[1] 花文健,刘　宁,刘作良.基于模糊数排序的武器系统效能评估方法[J].空军工程大学学报(自然科学版).2004,2(5):30-33.

[2] Tran L, Duckstein L. Comparison of Fuzzy Numbers Using a Fuzzy Distance Measure[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130: 331-341.

[3] 李登峰.模糊多目标多人决策与对策[M].北京:国防工业出版社,2003.

(编辑:田新华)

Ranking Fuzzy Numbers Based on Relative Membership Degree

SONG Zhi-hua, ZHANG Duo-lin, GONG Li-zhan

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China)

Abstract: In order to overcome the shortcoming of the fuzzy numbers membership function in ranking fuzzy numbers in the air defense, the definition of relative membership degree is introduced, and then the relative membership degree deviation is defined. Moreover, a method of ranking fuzzy numbers based on relative membership degree is proposed. Thus, by using this method, the problem mentioned above can be solved.

Key words: ranking fuzzy numbers; relative membership degree; relative membership degree deviation