两端奇异的自伴微分算子的解析描述

刘鸿基

(商丘师范学院计算机科学系，河南商丘 476000)

摘　要：给出了所有可能情况下自伴域的完全描述。关于对称微分算子在最大算子域内界定自伴域的边界条件问题，去掉了两端亏指数相等的限制条件，给出线性流形为自伴扩张域的充分必要条件，从而使两端奇异的自伴微分算子的解析描述得到完满解决。

关键词：微分算子；对称微分算式；自伴域；线性流形；亏指数

中图分类号： O175. 1　　**文献标识码**： A　　**文章编号**： 1009-3516(2006)03-0092-03

设 $\tau(y) = \sum_{j=0}^{n} P_{n-j}(x) D^j y, D^j = \mathrm{d}^j/\mathrm{d}x^j$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上 n 阶复系数微分算式，其中 $p_0(x) > 0, p_{n-j} \in c^j(-\infty,\infty)$。若 $\tau(y)$ 恒等于其共轭算式 $\tau^*(y) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j D^j p_{n-j}(x) y$，则称它是对称微分算式。

恒设 $\tau(y)$ 为对称的微分算式，其亏指数为 (u^-,u^+)。又令 (m_1^-,m_1^+) 和 (m_2^-,m_2^+) 分别为 $\tau(y)$ 局限于 $[0,\infty)$ 和 $[-\infty,0)$ 上的亏指数。则有 Kodaira 公式[1]：$u^- = m_1^- + m_2^- - n; u^+ = m_1^+ + m_2^+ - n$。

两端奇异的自伴算子的解析描述问题必然与一端奇异的自伴算子的描述问题密切相关。据此，尚在久、朱瑞英将 $(-\infty,\infty)$ 上的 n 阶对称微分算式 $\tau(y)$ 按照它在端点 $-\infty$ 与 ∞ 的亏指数的不同分布划分成 4 种情况[2]。并对每一种情况分别给出了 $\tau(y)$ 在最大算子域内界界定自伴域的边条件所满足的充分必要条件。但文献[2] 仅讨论了两端亏指数相等的情况。本文改进了文献[3] 的几个引理，并推广应用文献[3]、[4] 的方法，给出一切可能情况下自伴域的完全描述。

1　引理

引理 1.1　设 $\mu^- = \mu^+ = \mu, L^2(-\infty,\infty)$ 中的算子 A 是 T_0 的自伴扩张算子的充分必要条件是存在 $w_1, w_2, \cdots, w_\mu \in D(T)$，满足：(i) 模 $D(T_0)$ 线性无关；(ii) $[w_i,w_j]_{-\infty}^{\infty} = 0, i,j = 1,2,\cdots,\mu$

$$D(A) = \{u \in D(T) \mid [w_j,u]_{-\infty}^{\infty} = 0, j = 1,2,\cdots,\mu\} \tag{1}$$

该引理为文献[5] 中第五章定理 4 的自然推广。

根据文献[1] 中 K. Kodaira 定理，方程 $(\tau-\lambda)y = 0$ 与 $(\tau-\bar{\lambda})y = 0 (I_{m\lambda} > 0)$ 分别有 m_1^- 个与 m_1^+ 个线性无关的属于 $L^2[0,\infty)$ 的解，分别记为 $\phi_1,\cdots,\phi_{m_1^-},\phi_{m_1^-+1},\cdots,\phi_{m_1}$。同样，方程 $(\tau-\lambda)y = -$ 与 $(\tau-\bar{\lambda})y = 0 (I_{m\lambda} > 0)$ 分别有 m_2^- 与 m_2^+ 个线性无关的属于 $L^2[-\infty,0)$ 的解，分别记为 $\psi_1,\cdots,\psi_{m_2^-},\psi_{m_2^-+1},\cdots,\psi_{m_2}$。

引理 1.2

$$\operatorname{rank}([\phi_r,\phi_s]_\infty)_{1\le r,s\le m_1} = m_1 - n \tag{2}$$

$$\operatorname{rank}([\psi_r,\psi_s]_{-\infty})_{1\le r,s\le m_2} = m_2 - n \tag{3}$$

引理 1.3　$\operatorname{rank} D_{n\times n} = n$

引理 1.4　设 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{m_1}$ 如前所述，且 $\operatorname{rank} E^1_{(m_1-n)\times m_1} = \operatorname{rank}([\phi_r,\phi_s]_\infty)_{1\le r\le m_1-n, 1\le s\le m_1} = m_1 - n$ 成立，则每个 $\phi_r (m_1-n+1 \le r \le m_1)$ 有 $\phi_r = \phi_{r0} + \sum_{j=1}^{n} C_{rj} Z_j + \sum_{s=1}^{m_1-n} a_{rs}\phi_s$ 唯一表示式。其中 $\phi_{r0} \in D(T_{1,0})$，$Z_j (1 \le j \le n)$ 满足

$$Z_j^{(l-1)}(0) = \delta_{jl}, Z_j(x) \equiv 0 (-\infty < x \le a < 0 \text{或} 0 < b \le x < \infty) \quad j,l = 1,2,\cdots,n \tag{4}$$

收稿日期:2005－11－17
基金项目:河南省自然科学基金资助项目(0511013700)
作者简介:刘鸿基(1957－) 男,河南开封市人,副教授,主要从事微分方程及应用数学方面的教学与研究工作.

引理1.5　$D(T_1)=D(T_{1.0})+L(z_1,\cdots,z_n)+L(\phi_1,\cdots,\phi_{m_1-n})$，$D(T_2)=D(T_{2.0})+L(z_1,\cdots,z_n)+L(\psi_1,\cdots,\psi_{m_2-n})$。

2　主要结论及其证明

记 $B^+=([\phi_r,\phi_s]_\infty)_{1\le r,s\le m_1-n}$，$B^-=([\psi_r,\psi_s]_{-\infty})_{1\le r,s\le m_2-n}$。

定理　设 T_0、T 是 $(-\infty,\infty)$ 上的对称微分算式 $\tau(y)$ 在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中生成的最小算子和最大算子，$\mu^-=\mu^+=\mu$，那么 $D(T)$ 中的线性流形 D 是 T_0 的自伴扩张域的充分必要条件是存在 $\mu\times(m_2-n)$ 矩阵 M 和 $\mu\times(m_1-n)$ 矩阵 N，满足：(I) $\mathrm{rank}(MN)=\mu$；(II) $MB^-M^*=NB^+N^*$。使得

$$D=\left\{y\in D(T)\mid M\begin{bmatrix}[\psi_1,y]_{-\infty}\\ [\psi_2,y]_{-\infty}\\ \vdots\\ [\psi_{m_2-n},y]_{-\infty}\end{bmatrix}-N\begin{bmatrix}[\phi_1,y]_\infty\\ [\phi_2,y]_\infty\\ \vdots\\ [\phi_{m_1-n},y]_\infty\end{bmatrix}=0\right\}\tag{5}$$

证明（充分性）由文献[5]知存在 $z_j(x)\in D(T),1\le j\le n$ 满足式(4)，记

$$M=(\rho_{ij})_{\mu\times(m_2-n)},N=(\tau_{ij})_{\mu\times(m_1-n)}\tag{6}$$

$$u_i(x)=\sum_{m=n}^{m_2-n}\rho_{ij}\psi_j(x)\quad(i=1,\cdots,\mu)\tag{7}$$

$$v_i(x)=\sum_{j=1}^{j=1}\tau_{ij}\phi_j(x)\quad(i=1,\cdots,\mu)\tag{8}$$

同样由文献[5]知，存在 $\overline{w_i}\in D(T)$ 满足

$$\overline{w}_i^{(l-1)}(a)=u_i^{(l-1)}(a),\overline{w}_i^{(l-1)}(b)=v_i^{(l-1)}(b)(1\le l\le n,1\le i\le\mu)\tag{9}$$

命 $$w_i(x)=\begin{cases}u_i(x),x\in(-\infty,a]\\ \overline{w}_i(x),x\in(a,b)\quad(i=1,\cdots,\mu)\\ v_i(x)x\in[b,\infty)\end{cases}\tag{10}$$

显然 $w_i\in D(T)$。于是，由式(6)、(8)、(9)、(10)得(11)。由式(6)、(7)、(9)、(10)得(12)。

$$N=\begin{bmatrix}[\phi_1,y]_\infty\\ [\phi_2,y]_\infty\\ \vdots\\ [\phi_{m_1-n},y]_\infty\end{bmatrix}=(\tau_{ij})_{\mu\times(m_1-n)}\begin{bmatrix}[\phi_1,y]_\infty\\ [\phi_2,y]_\infty\\ \vdots\\ [\phi_{m_1-n},y]_\infty\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\sum_{j=1}^{m_1-n}\tau_{1j}\phi_j,y]_\infty\\ [\sum_{j=1}^{m_1-n}\tau_{\mu j}\phi_j,y]_\infty\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[w_1,y]_\infty\\ [w_\mu,y]_\infty\end{bmatrix}\tag{11}$$

$$M\begin{pmatrix}[\psi_1,y]_{-\infty}\\ [\psi_2,y]_{-\infty}\\ \vdots\\ [\psi_{m_1-n},y]_{-\infty}\end{pmatrix}=(\rho_{ij})_{\mu\times(m_2-n)}\begin{pmatrix}[\psi_1,y]_{-\infty}\\ [\psi_2,y]_{-\infty}\\ \vdots\\ [\psi_{m_1-n},y]_{-\infty}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[w_1,y]_{-\infty}\\ [w_\mu,y]_{-\infty}\end{pmatrix}\tag{12}$$

因此，定理的边条件(5)转化为引理1.1的式(1)。下面证明 $w_1,\cdots,w_\mu$ 满足引理1.1的条件。

先证(i)若不然，则存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots c_\mu$ 使得 $\sum_{j=1}^{\mu}c_jw_j\in D(T_0)$。由文献[5]及式(6)、(8)、(9)、(10)知

$$O=[\sum_{i=1}^{\mu}c_jw_j,\phi_j]_\infty=(c_1,\cdots,c_\mu)\begin{pmatrix}[w_1,\phi_j]_\infty\\ [w_2,\phi_j]_\infty\\ \vdots\\ [w_\mu,\phi_j]_\infty\end{pmatrix}=(c_1,\cdots,c_\mu)\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{m_1-n}\tau_{1i}[\phi_i,\phi_j]_\infty\\ \sum_{i=1}^{m_1-n}\tau_{\mu i}[\phi_i,\phi_j]_\infty\end{pmatrix},j=1,\cdots,m_1-n,\cdots m_1。$$

写成矩阵形式，得到 $(c_1,\cdots,c_\mu)NE'=0$，由引理1.4可得 $(c_1,\cdots,c_\mu)N=0$。

类似可证 $(c_1,\cdots,c_\mu)M=0$，综上可知，$(c_1,\cdots,c_\mu)(MN)=0$ 这与 $\mathrm{rank}(MN)=0$ 矛盾。

再证 (ii) $([w_i,w_j]_\infty)_{1\le i,j\le\mu}=([v_i,v_j]_\infty)_{1\le i,j\le\mu}=([\sum_{r=1}^{m_1-n}\tau_{ir}\phi_r,\sum_{s=1}^{m_1-n}\tau_{js}\phi_s]_\infty)_{1\le i,j\le\mu}=(\sum_{r,s=1}^{m_1-n}\tau_{ir}\overline{\tau}_{js}[\phi_r,\phi_s]_\infty)_{1\le i,j\le\mu}=NB^+N^*$。

类似可证 $([w_i,w_j]_{-\infty})_{1\le i,j\le\mu})=MB^-M^*$ 因此，由定理的条件(II)知引理1.1的(ii)成立。

（必要性）据引理1.1，存在 $w_1,\cdots,w_\mu\in D(T)$ 满足引理1.1的条件(i)和(ii)，使得

$$D=\{y\in D(T)\mid [w_j,y]_{-\infty}^{\infty}=0,j-1,\cdots,\mu\}\tag{13}$$

由于 $w_r \in D(T)$,所以 $w_r \in D(T_1)$,$w_r \in D(T_2)$ 。据引理 1.5,当 $x \in [0,\infty)$ 时, w_r 有如下唯一分解

$$w_r = w_{r0} + \sum_{j=1}^{n} d_{rj} z_j + \sum_{j=1}^{m_1-n} \tau_{rj}\phi_j (r = 1,\cdots,\mu) \tag{14}$$

其中 $w_{r0} \in D(T_{1.0})$ 。同样由引理 1.5 知,当 $x \in [-\infty,0)$ 时,w_r有如下唯一分解

$$w_r = \overline{w}_{r0} + \sum_{j=1}^{n} c_{rj} z_j + \sum_{j=1}^{m_2-n} \rho_{rj}\psi_j (r = 1,\cdots,\mu) \tag{15}$$

其中 $\overline{w}_{r0} \in D(T_{2.0})$ 。命

$$M = (\rho_{ij})_{\mu\times(m_2-n)}, N = (\tau_{ij})_{\mu\times(m_1-n)} \tag{16}$$

依据式(14)、(16),并注意到$[w_{r0},y]_\infty = 0 (r = 1,\cdots,\mu)$ 和$[z_j,y]_\infty = 0 (j = 1,\cdots,n)$ 可得

$$\begin{pmatrix}[w_1,y]_\infty\\ \vdots \\ [w_\mu,y]_\infty\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[\sum_{j=1}^{m_1-n}\tau_{1j}\phi_j,y]_\infty\\ \vdots \\ [\sum_{j=1}^{m_1-n}\tau_{\mu j}\phi_j,y]_\infty\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[\sum_{j=1}^{m_1-n}\tau_{1j}[\phi_j,y]_\infty\\ \vdots \\ [\sum_{j=1}^{m_1-n}\tau_{\mu j}[\phi_j,y]_\infty\end{pmatrix} = (\tau_{ij})_{\mu\times(m_1-n)}\begin{pmatrix}[\phi_1,y]_\infty\\ [\phi_2,y]_\infty\\ \vdots \\ [\phi_{m_1-n},y]_\infty\end{pmatrix} = N\begin{pmatrix}[\phi_1,y]_\infty\\ [\phi_2,y]_\infty\\ \vdots \\ [\phi_{m_1-n},y]_\infty\end{pmatrix}$$

类似地,由式(15) 和(16) 可得$\begin{pmatrix}[w_1,y]_{-\infty}\\ \cdots \\ [w_\mu,y]_{-\infty}\end{pmatrix} = M\begin{bmatrix}[\psi_1,y]_{-\infty}\\ \cdots \\ [\psi_{m_2-n},y]_{-\infty}\end{bmatrix}$。这样,由式(13) 知式(5) 成立,下面再证明 M、N 满足定理的条件(I) 和(II) 即可。

先证(I) 若 $\mathrm{rank}(MN) < \mu$,则存在不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_\mu$,使得$(c_1,\cdots,c_\mu)(MN) = 0$ 。因此,$(c_1,\cdots,c_\mu)M = 0$ 与$(c_1,\cdots,c_\mu)N = 0$ 。命 $u = \sum_{r=1}^{\mu} c_r w_r$。

当 $x \in [0,-\infty)$ 时,由式(14) 知 $u = \sum_{r=1}^{\mu} c_r w_{r0} + \sum_{r=1}^{\mu} = \sum_{j=1}^{n} c_r d_{rj} z_j + \sum_{r=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{m_1-n} c_r \tau_{rj}\phi_j$

由$(c_1,\cdots,c_\mu)N = 0$ 知, $\sum_{r=1}^{\mu} c_r\tau_{rj} = 0 (j = 1,\cdots,m_1-n)$。所以 $u = \sum_{r=1}^{\mu} c_r w_{r0} + \sum_{r=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{n} c_r d_{rj} z_j$,从而对任何 $y \in D(T_1)$ 都有$[u,y]_{-\infty} = 0$ 。

类似可证,对任何 $y \in D(T_2)$ 都有$[u,y]_{-\infty} = 0$。

综上所述,对任何 $y \in D(T)$ 都有$[u,y]_{-\infty} = [u,y]_\infty = 0$。由文献[5] 知,$u \in D(T_0)$。这与引理 1.1 的(i) 矛盾。

再证(II) 据式(14)、(16),并注意到式(4) 和 $w_{r0} \in D(T_{1.0})$ 得

$$([w_i,w_j]_\infty)_{1\le i,j\le\mu} = ([\sum_{r=1}^{m_1-n}\tau_{ir}\phi_r, \sum_{s=1}^{m_1-n}\tau_{js}\phi_s]_\infty)_{1\le i,j\le\mu} = (\sum_{|r,s=1}^{m_1-n}\tau_{ir}\overline{\tau}_{js}[\phi_r,\phi_s])_\infty)_{1\le i,j\le\mu} = NB^+N^*$$

类似地,可证$([w_i,w_j]_\infty)_{1\le i,j\le\mu} = NB^+N^*$ 。因此,由引理 1.1 的(ii)知定理的(II)成立。故该定理为真。

参考文献:

[1] 曹之江. 常微分算子[M]. 上海:上海科学技术出版社,2001.

[2] 尚在久,朱瑞英. $(-\infty,\infty)$上对称微分算子的自伴域[J]. 内蒙古大学学报,1986,17(1):7-27.

[3] Sun-jiong. On Self-adjoint Extensions of Singular Symmetric Differential Operators with Middle Deficiency Indices[J]. Acta Math. Simica,New series,1996,2(2):152-167.

[4] 曹之江. 高阶极限圆形微分算子的自伴扩张[J]. 数学学报,1985,28(2):205-217.

[5] НаймаркМ А. Линейнне Дифференупалиине Отператорн[M]. Гостехиздат,1994.

(编辑:姚树峰)

Analytic Description of Self-adjoint Differential Operators with both Strange Ends

LIU Hong-ji

(Shangqiu Teachers College, Shangqiu, Henan 476000, China)

Abstract: In this paper, several lemmas in [3] are improved, the method used in [2] and [3] is generalized, the complete description of all the possibility of self-adjoint area is given, and the limitation on the equal condition of defect index at the both ends in text [4] is reduced, thus making the analytic description of selfadjoint differential operators at the both strange ends solved completely.

Key words: differential operators; symmetric differential operators ;. selfadjoint area; linear manifold; defect index