一类离散的传染病模型分析

李颖路， 雷 磊， 马润年

(空军工程大学电讯工程学院，陕西西安 710077)

摘要：在一定的假设下，建立了一类离散的SIR传染病模型，借助差分方程理论，分析得到易感者和染病者的最终状态，并发现染病者数量的变化规律及相应的阈值条件。

关键词：离散传染病模型；最终状态；阈值

中图分类号：O175.1 文献标识码：A 文章编号：1009-3516(2006)03-0085-04

在数学分析中,由于连续模型易于定性分析,同时,相应于连续模型的离散模型往往会出现一些不同的动力学性态,甚至出现混沌现象,因此,在传染病模型的研究中,连续模型的出现远多于离散模型。最早的传染病模型是 Kermack 和 Mckendrick 借助连续时间的模型来描述 1665－1666 年黑死病在伦敦的流行规律的[1]。近些年来,随着计算机技术的发展,出现一些离散模型的研究,发现离散的传染病模型会出现2－周期和混沌等复杂现象[2-4]。

本文在一定的合理假设下,建立一类离散时间的SIR传染病模型,并对其进行研究。

1 模型

首先,在不考虑个体的出生与死亡的前提下,将整个种群分为易感者、染病者和恢复者3个子种群,他们在时刻 t 的数量分别记为 $S(t)$,$I(t)$ 和 $R(t)$,于是总种群的大小保持为常数 N ,即 $S(t)+I(t)+R(t)=N$ 。其次假设一个易感者在单位时间内与其他个体接触数是常数 α ,则在 Δt 时间内一个易感者与染病者接触的次数为 $\frac{\alpha\Delta t}{N}I(t)$。再假设在 Δt 时间内一个易感者由于与染病者接触而染病的概率为 $1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I(t)}$,不染病的概率为 $e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I(t)}$。于是经过时间段 $[t,t+\Delta t]$ 后剩余的易感者为 $S(t)e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I(t)}$,新成为染病者的数量为 $S(t)[1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I(t)}]$ 。同时还假设在 Δt 时间内一个染病者恢复的概率为 $\gamma\Delta t$,于是在时间段 $[t,t+\Delta t]$ 内恢复的染病者数量为 $\gamma\Delta tI(t)$ 。为了符合实际情形,这里要求 $\gamma\Delta t\leqslant 1$。

在上面的假设下,取 Δt 为确定值,作为时间步长,并记易感者、染病者和恢复者在时刻 $t=n\Delta t$ 的数量分别为 S_n,I_n 和 R_n,便可得到离散时间的SIR传染病模型:

$$\begin{cases} S_{n+1}=S_n e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}, \\ I_{n+1}=I_n(1-\gamma\Delta t)+S_n(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}), \\ R_{n+1}=R_n+\gamma\Delta tI_n \end{cases} \tag{1}$$

对此模型,记易感者、染病者和恢复者的初始值分别为 S_0、I_0 和 R_0,其中 S_0 和 I_0 都是正的,R_0 是非负的。根据前面的假设有 $S_0+I_0+R_0=N$ 。

为了说明其合理性,首先证明下面的引理。

引理1 当 $\gamma\Delta t\leqslant$ 时,差分方程

$$y_{n+1}=y_n(1-\gamma\Delta t)+(N-y_n)(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}y_n}) \tag{2}$$

在初始条件 $y_0\in(0,N)$ 下的解均位于区间 $(0,N)$ 内。

证 方程(2)可变为方程 $y_{n+1}=(N-\gamma\Delta ty_n)-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}y_n}(N-y_n)$。定义函数 $f(\varepsilon)=(N-\gamma\Delta t\varepsilon)-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon}(N-$

收稿日期:2006－01－07
作者简介:李颖路(1980－),男,河北沧州人,硕士生,主要从事计算机模型分析研究.

ε)。下面将证明当 $\gamma\Delta t\leqslant 1$ 时,对于任意 $\varepsilon\in(0,N)$ 都有 $0<f(\varepsilon)<N$ 。

对于函数 $f(\varepsilon)$,直接计算即有

$$f'(\varepsilon)=-\gamma\Delta t+(1+\alpha\Delta t-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon)e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon}\quad ;\quad f''(\varepsilon)=-\frac{\alpha\Delta t}{N}e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon}(2+\alpha\Delta t-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon)<0$$

$f''(\varepsilon)<0$ 意味着 $f(\varepsilon)$ 在区间 $(0,N)$ 内是向下凹的,同时有:

$f(0)=0$, $f'(0)=1+\alpha\Delta t-\gamma\Delta t>0$, $0\leqslant f(N)=N(1-\gamma\Delta t)<N$, $f'(N)=-\gamma\Delta t+e^{-\alpha\Delta t}$

1) 当 $\gamma\Delta t\leqslant e^{-\alpha\Delta t}$ 时, $f'(N)\geqslant 0$。于是对 $\varepsilon\in(0,N)$,有 $f'(N)\geqslant 0$,即在区间 $(0,N)$ 内函数 $f(\varepsilon)$ 是单调递增的,因此对 $0<\varepsilon<N$ 有 $0<f(\varepsilon)<N$ 。

2) 当 $e^{-\alpha\Delta t}<\gamma\Delta t\leqslant 1$ 时, $f'(N)<0$。因此存在唯一的 $\varepsilon^*\in(0,N)$ 使得 $f'(\varepsilon^*)=0$,并且 $f(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=\varepsilon^*$ 处取到在区间 $(0,N)$ 内的最大值。

由于 $f'(\varepsilon^*)=0$ 意味着 $e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon^*}=\gamma\Delta t/(1+\alpha\Delta t-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon^*)$,因此

$$f(\varepsilon^*)=\{N(1+\alpha\Delta t-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon^*)-\gamma\Delta t[N+\varepsilon\alpha\Delta t(1-\frac{\varepsilon^*}{N})]\}/(1+\alpha\Delta t-\frac{\alpha\Delta t}{N}\varepsilon^*)<N$$

所以,当 $e^{-\alpha\Delta t}<\gamma\Delta t\leqslant 1$ 时,对于 $0<\varepsilon<N$ 有 $0<f(\varepsilon)<N$。

从上面的推理可知,当 $\gamma\Delta t\leqslant 1$ 时,只要 $y_0\in(0,N)$,就有 $0<y_n<N(n=1,2,\cdots)$ 。因此引理1成立。

对于第一种情况,当 $\gamma\Delta t\leqslant 1$ 时,对 $I_0>0$ 显然有 $I_n>0$ 。将 $S_n=N-I_n-R_n$ 代入方程(1)中的第二个方程,可得: $I_{n+1}=I_n(1-\gamma\Delta t)+(N-I_n-R_n)(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})<I_n(1-\gamma\Delta t)+(N-I_n)(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})$。

由引理1,当 $\gamma\Delta t\leqslant 1$ 时, $0<I_n(1-\gamma\Delta t)+(N-I_n)(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})<N$,即 $I_{n+1}<N$ 。这说明方程(1)的解 S_n、I_n 和 R_n 总是非负的,且 $S_n+I_n+R_n=N$,因此,方程(1)建立起的模型符合实际情形。

2 模型分析

首先关于模型中易感者和染病者的极限情形进行分析。

定理1 对于方程(1), S_n 和 I_n 当 $n\to\infty$ 时分别趋向于 S_∞ 和 I_∞,并且有 $0<S_\infty<\frac{\gamma N}{\alpha}$ 和 $I_\infty=0$。

定理1的证明可由下面3个命题来完成。

命题1 对方程(1),当 $n\to\infty$ 时, S_n 趋近于常数 S_∞,且 $S_\infty<\frac{\gamma N}{\alpha}$。

证 从方程(1)的第一个方程知,当 n 逐渐增大时 S_n 递减。由于 S_n 的非负性,所以 S_n 当 $n\to\infty$ 时趋向于一个非负常数 S_∞。

当 $S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时,由于 S_n 严格单调递减,所以有 $S_\infty<\frac{\gamma N}{\alpha}$。

当 $S_0>\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时,假设 $S_\infty\geqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$,则对 $n=1,2,\cdots$ 都有 $S_n>\frac{\gamma N}{\alpha}$。于是有 $S_{n+1}=S_ne^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}>\frac{\gamma N}{\alpha}$,所以 $S_n>\frac{\gamma N}{\alpha}e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}$。因此 $\frac{I_{n+1}}{I_n}=1-\gamma\Delta t+\frac{S_n}{I_n}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})>1-\gamma\Delta t+\frac{\gamma N}{\alpha I_n}(e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}-1)>1$

其中用到不等式 $e^x-1>x(x>0)$。因此当 n 增大时 I_n 单调递增,同时有 $I_n>I_0(n=1,2,\cdots)$ 。进一步, $R_{n+1}=R_n+\gamma\Delta tI_n>R_n+\gamma\Delta tI_0$。通过迭代,可得 $R_n>R_0+n\gamma\Delta tI_0$,因此当 $n\to\infty$ 时 R_n 也趋向于无穷大。这显然是不可能的。因此 $S_\infty<\frac{\gamma N}{\alpha}$。命题1得证。

命题2 对于方程(1),当 $n\to\infty$ 时, I_n,趋向于零。

证 从命题1知,存在正整数 n_0,使得 $n\geqslant n_0$ 时 $S_n<\frac{\gamma N}{\alpha}$。因此,对于 $n\geqslant n_0$ 有

$$I_{n+1}<I_n(1-\gamma\Delta t)+\frac{\gamma N}{\alpha}(1-e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})\leqslant I_n$$

其中用到不等式 $1<e^{-x}<x(x>0)$。由于 I_n 的非负性,所以当 $n\to\infty$ 时 I_n 趋向于一个非负常数 I_∞。

如果 $I_\infty>0$,对于方程(1)中的第二个方程的两端取极限,同时注意到 $S_\infty<\frac{\gamma N}{\alpha}$,便有

$$\gamma\Delta tI_\infty=S_\infty(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_\infty})<\frac{\gamma N}{\alpha}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_\infty})<\gamma\Delta tI_\infty$$

这个矛盾意味着 $I_\infty=0$。命题2得证。

命题3　当 $n\to\infty$ 时，S_n 的极限 S_∞ 是正的。

证　由于 $S_{n+1}=S_n e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}$，所以通过迭代可得：$S_{n+1}=S_0 e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_0+I_1+\cdots+I_n)$

由命题1可知，存在正整数 n_1，使得 $n\geqslant n_1$ 时有 $S_n<S_{n_1}\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$。因此，对 $n\geqslant n_1$ 有

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}=1-\gamma\Delta t+\frac{S_n}{I_n}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})\leqslant 1-\gamma\Delta t+\frac{\alpha\Delta t}{N}S_n\leqslant 1-\gamma\Delta t\frac{\alpha\Delta t}{N}S_{n_1}$$

记　$q=1-\gamma\Delta t+\frac{\alpha\Delta t}{N}S_{n_1}$，则由 $S\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$ 有 $q<1$，因此对 $n\geqslant n_1$ 有 $\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant q$，于是 $I_{n_1+k}\leqslant I_{n_1}q^k(k=1,2,\cdots)$。

对任意正整数 m，有

$$S_{n_1+m+1}=e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_0+I_1+\cdots+I_{n_1-1})e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_0+I_1+\cdots+I_{n_1+m})\geqslant e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_0+I_1+\cdots+I_{n_1-1})e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_{n_1}+qI_{n_l}+\cdots+q^mI_{n_1})=$$

$$e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_0+I_1+\cdots+I_{n_1-1})e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_{n_1}\frac{1-q^{m+1}}{1-q}}>e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_0+I_1+\cdots+I_{n_1-1})e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_{n_1}\frac{1}{1-q}}$$

注意到 $e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}}(I_0+I_1+\cdots+I_{n_1-1})e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_{n_1}\frac{1-q^{m+1}}{1-q}}$ 是一个正常数。因此，$S_\infty>0$ 成立。命题3得证。

上述3个命题的证明显示定理1成立。定理1意味着疾病最终会灭绝。同时由证明过程知，易感者的最终数量 S_∞ 依赖于其初值 S_0。

下面考虑染病者数量 I_n 的变化趋势。

引理2　当 $I_{n+1}<I_n$ 时有 $S_{n+1}<\frac{\alpha\Delta t}{N}$；当 $I_{n+1}>I_n$ 时有 $S_n>\frac{\gamma N}{\alpha}$。

证　当 $I_{n+1}<I_n$ 时，从方程(1)中的第二个方程可得：$S_n(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})<\gamma\Delta tI_N$，由于 $S_{n+1}=S_n e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}$，所以有 $S_n(e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}-1)<\gamma\Delta tI_n$。进一步，$S_{n+1}<\frac{\gamma\Delta tI_n}{e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}-1}<\frac{\gamma N}{\alpha}$。

当 $I_{n+1}>I_n$ 时，从方程(1)中的第二个方程可得：$S_n(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})>\gamma\Delta tI_n$。因此，$S_n>\frac{1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}}{\gamma\Delta tI_n}>\frac{\gamma N}{\alpha}$。

引理3　当 $S_{n+1}>\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时有 $I_{n+1}>I_n$；当 $S_n\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时有 $I_{n+1}<I_n$。

证　当 $S_{n+1}>\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时，由方程(1)中的第一个方程可得：$S_n>\frac{\gamma N}{\alpha}e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}$。因此，$\frac{I_{n+1}}{I_n}=1-\gamma\Delta t+\frac{S_n}{I_n}(1-e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})>1-\gamma\Delta t+\frac{\gamma N}{\alpha I_n}(e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n}-1)<1$ 即 $I_{n+1}>I_n$。当 $S_n>\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时有 $\frac{I_{n+1}}{I_n}=1-\gamma\Delta t+\frac{S_n}{I_n}(1-e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})<1-\gamma\Delta t+\frac{\gamma N}{\alpha I_n}(1-e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_n})<1$，即 $I_{n+1}<I_n$。

由引理2和引理3，只要 n_2 满足 $I_{n_2+1}<I_{n_2}$，则对 $n>n_2$ 便有 $I_{n+1}<I_n$。

下面根据易感者的初值来分两种情况讨论染病者数量的变化。

1) 当 $S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时，由引理3有 $I_{n+1}<I_n(n=0,1,2,\cdots)$。进一步，由定理1知当 $n\to\infty$ 时，I_n 单调递减趋向于零。这意味着染病者数量只要在某一时刻 $n_2\Delta t$ 开始递减，则在以后也都单调递减。

2) 当 $S_0>\frac{\gamma N}{\alpha}$ 时，记 $f(\Delta t)=1-\gamma\Delta t+\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_0})(0<\Delta t\leqslant\frac{1}{\gamma})$，则

$$\frac{I_1}{I_0}=f(\Delta t)\quad,\quad f'(\Delta t)=-\gamma+\frac{\alpha S_0}{N}e^{-\frac{\alpha\Delta t}{N}I_0},f''(\Delta t)=-\frac{\alpha^2S_0I_0}{N^2}e^{\frac{\alpha\Delta t}{N}I_0}<0$$

因此函数 $f(\Delta t)(0,\frac{1}{\gamma})$ 是向下凹的。同时有：$f(0)=1$，$f'(0)=-\gamma+\frac{\alpha S_0}{N}>0$，$f(\frac{1}{\gamma})=\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}})$。

1) 当 $f(\frac{1}{\gamma})>1$ 时有 $f(\Delta t)>1(0<\Delta t\leqslant\frac{1}{\gamma})$，这意味着 $I_1>I_0$。

2) 当 $f(\frac{1}{\gamma})=1$ 时有 $f(\Delta t)>1(0<\Delta t\leqslant\frac{1}{\gamma})$，因此 $I_1>I_0(0<\Delta t\leqslant\frac{1}{\gamma})$。

对于 $\Delta t=\frac{1}{\gamma}$，当 $f(\gamma)=1$ 时有 $I_n<I_{n-1}<\cdots<I_1=I_0$。事实上，$f(\gamma)=1$ 和 $\Delta t=\frac{1}{\gamma}$ 意味着 $f\Delta t=1$，因此 $I_1=I_0$。

当 $\Delta t=\frac{1}{\gamma}$ 时,方程(1)变为

$$\begin{cases}S_{n+1}=S_n e^{-\frac{\alpha I_n}{\gamma N}}\\ I_{n+1}=S_n(1-e^{-\frac{\alpha I_n}{\gamma N}})\end{cases} \tag{3}$$

由方程(3)可得:$\frac{S_1}{I_1}=\frac{e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}}}{1-e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}}}$,注意到 $I_1=I_0$ 有:$\frac{I_2}{I_1}=\frac{S_1}{I_1}(1-e^{-\frac{\alpha I_1}{\gamma N}})=e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}}<1$,即 $I_2<I_1$。如此由引理2有 $S_2<\frac{\gamma N}{\alpha}$,因此 $S_2<\frac{\gamma N}{\alpha}(n=2,3,\cdots)$。由引理3便知 $I_{n+1}<1(n=1,2,\cdots)$。

3) 当 $f(\frac{1}{\gamma})<1$ 时,存在 $\Delta t^*\in(0,\frac{1}{\gamma})$ 使得 $f(\Delta t)>1(0<\Delta t<\Delta t^*)$、$f(\Delta t)=1(\Delta t=\Delta t^*)$ 和 $f(\Delta t)<1$ $(\Delta t^*<\Delta t\leqslant\frac{1}{\gamma})$。因此有,$I_1>I_0(0<\Delta t<\Delta t^*)$、$I_1=I_0(\Delta t=\Delta t^*)$ 和 $I_1<I_0(\Delta t^*<\Delta t\leqslant\frac{1}{\gamma})$。

由于 $f(\Delta t^*)=1$ 意味着

$$\gamma\Delta t^*=\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t^*}{\gamma}I_0}) \tag{4}$$

因此,对于 $\Delta t=\Delta t^*$ 有:$\frac{I_2}{I_1}=1-\gamma\Delta t^*+\frac{S_1}{I_1}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t^*}{\gamma}I_1})=1-\gamma\Delta t^*+\frac{S_1}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t^*}{\gamma}I_0})<1-\gamma\Delta t^*+\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha\Delta t^*}{\gamma}I_0})=1$,即 $I_2<I_1$。因此,$I_n<I_{n-1}<\cdots<I_1=I_0$。

定理2 1)当下列条件之一满足时,染病者数量总是递减的:①$S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$;②$S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$ 、$\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}})=1$,且 $\Delta t=\frac{1}{\gamma}$;③$S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$、$\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}})<1$,且 $\Delta t\geqslant\Delta t^*$。

2)当下列条件之一满足时,染病者数量在初始阶段是递增的:①$S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$ 且 $\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}})>1$;②$S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$、$\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}})=1$,且 $0<\Delta t<\frac{1}{\gamma}$;③$S_0\leqslant\frac{\gamma N}{\alpha}$、$\frac{S_0}{I_0}(1-e^{-\frac{\alpha I_0}{\gamma N}})<1$,且 $0<\Delta t<\Delta t^*$(其中 Δt^* 由式(4)定义)。

参考文献:

[1] Kermack W O, Mckendrick A G. Contribution to the Mathematical Theory Ofepidemics[J]. Proc Roy Soc, 1933, 141: 94-122.

[2] Allen L J S, Burgin A M. Comparison of Deterministic and Stochastic SIS and SIR Models in Discrete Time[J]. Math Biosci, 2000, 163: 1-33.

[3] Allen L J S. Some Discrete-Time SI SIR and SIS Epidemic Models[J]. MathBiosci, 1994, 124: 83-105.

[4] Zhou Y, Fergola P. Dynamics of a Discrete Age-Structured SIS Models[J]. Dis-Crete and Continuous Dynamical System-Series, 2004, 4: 841-850.

[5] 李建全,杨友社,杨国平. 一类SIS流行病传染模型的全局分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(5):88-90.

(编辑:门向生)

Analysis of A Discrete - time Epidemic Model

LI Ying- lu, LEI Lei, MA Run- nian

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: Under some assumptions, a discrete - time epidemic model is established. By means of theory of differential equation, the ultimate states of the susceptible and the infective are obtained, and the varying tendency of the number of the infective and the corresponding threshold condition are found.

Key words: discrete - time epidemic model; ultimate states; threshold