多人微分对策Pareto最优解的最优均衡值算法

寇光兴1, 李炳杰1,2, 赵惠文2

(1. 空军工程大学理学院,陕西西安 710051; 2. 西安电子科技大学理学院,陕西西安 710071)

摘要:引入多人微分对策的最优均衡值和最优均衡解概念。在某种凸性条件下最优均衡解集是Pareto最优解的凸本质连通区域。利用最优均衡解将问题等价地转化为求解单目标最优控制问题。该方法可推广到求解局中人拥有不同权重的情形,为求解多人合作微分对策问题提供了一种简单的、新的途径。

关键词:微分对策;最优均衡解;Pareto最优解;Hamilton-Jacobi方程

中图分类号:O225 TP273 文献标识码:A 文章编号:1009-3516(2006)03-0082-03

多人微分对策中,局中人的支付函数相互冲突,不可公度。求解该问题的 Pareto 最优解集需结合多目标决策理论进行研究。近年来已取得了不少成果[1-5],其中文献[1]引进了最优均衡解求解了实空间上的群体决策问题,该方法有其独到之处。本文受文献[1]思想的启发,引进一个求解合作微分对策问题 Pareto 最优解集的全新的方法——最优均衡值算法,引进一个求解该问题的单目标最优控制。该方法使局中人之间达成某种妥协,进一步寻找最优妥协值,使所有局中人的支付泛函非劣。并且对所有局中人是公平的,但仍可推广到求解具有主从性质的拥有不同权重的情形。该方法克服了以往算法的主观性、复杂性和特殊性,但其结论均适合求解这些问题。

1 最优均衡解

考虑 N 人微分对策问题(P)

$$\min_{u_i} J_i(x,u_1,u_2,\cdots,u_N) = g_i(x(T_0)) + \int_0^{T_0} h_i(t,x(t),u_1(t),u_2(t),\cdots,u_N(t))\mathrm{d}t \qquad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u_1(t),u_2(t),\cdots,u_N(t));\quad x(0) = x_0 \qquad (2)$$

设集合 X 为对任意$(t,x,u_1,u_2,\cdots,u_N) \in [0,T_0] \times R^m \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N$且满足式(2)的函数$x(t)$构成的集合,显然对满足控制集的任意控制函数,其轨迹 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau,x(\tau),u_1(\tau),u_2(\tau),\cdots,u_N(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (3)$$

定义1 称 $S = X \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N$为问题($P$)的可行函数集。

定义2 设 $\bar{s} = (\bar{x}(t),\bar{u}_1(t),\bar{u}_2(t),\cdots,\bar{u}_N(t)) \in S$,如果存在实数 $J \geqslant 0$ 对任意 $s \in S$ 满足

$$J_i(\bar{s}) - J_i(s) \leqslant J \quad (i = 1,2,\cdots,N) \qquad (4)$$

则称 $\bar{s}$为问题(P)的 J 均衡解,称 J 为均衡值。均衡值 J 是所有局中人就本身的支付函数而言给出的统一妥协值,如果 $\bar{s}$为问题(P)的 J 均衡解,则对任意 $J' > J$,$\bar{s}$ 为问题(P)的 J' 均衡解。

定义3 称集合 $\bar{G} = \{J | J_i(\bar{s}) - J_i(s) \leqslant J; s \in S, I = 1,2,\cdots,N\}$ 为 $\bar{s} \in S$ 的均衡集。

定理1 对任意 $\bar{s} \in S$,$\bar{G}$ 非空,对任意 $J_0 \in \bar{G}$,水平集 $\bar{G}(J_0) = \{J \in \bar{G} | J \leqslant J_0\}$ 是闭集,均衡集 $\bar{G}$存在最小值 $J_{\bar{s}}^*$。

收稿日期:2005-06-10
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2004 A05)
作者简介:寇光兴(1965-),男,陕西扶风人,副教授,主要从事分布参数最优控制算法研究.

证明　构造局中人 i 的理想策略问题(P_i)

$$\min_{s\in S} J_i(x,u_1,u_2,\cdots,u_N)\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

由假设条件式(1)－式(4)知,问题(P_i)存在最优目标值 $J_i^*(i=1,2,\cdots,N)$。

对任意$\bar{s}\in S$,令$\bar{J}=\max\{J_i(\bar{s})-J_i^*,i=1,2,\cdots,N\}$,显然$\bar{J}\geqslant 0$,对任意$\bar{s}\in S$,$J_i^*\leqslant J(s)$ $(i=1,2,\cdots,N)$,即 $J_i(\bar{s})-J_i(\bar{s})+J_i^*\leqslant J(s)$,因此,$J_i(\bar{s})-J(s)\leqslant J_i(\bar{s})-J_i^*\leqslant J(s)$。

故有$\bar{J}\in\bar{G}$,所以$\bar{G}$非空,而水平集$\bar{G}(J_0)$有界是显然的。

由假设条件式(1)－(4)知,支付函数$J_i(i=1,2,\cdots,N)$是连续泛函,可行函数集S是紧集。对任意$\bar{s}\in S$,假定均衡值序列$\{J_k\}\subset\bar{G}(J_0)$收敛于$J$,则必有$J_i(\bar{s})-J_i(s)\leqslant J_k$,由泛函$J_i$的连续性可知,$J_i(\bar{s})-J_i(s)\leqslant J_k$,即$J\in\bar{G}(J_0)$,因此$\bar{G}(J_0)$是闭集,均衡集$\bar{G}$存在最小值$\bar{J}_i^*$。

定义4　称$G=\bigcup\limits_{s\in S}\bar{G}$为可行函数集$S$的均衡集,其中,$\bar{G}$为$\bar{s}\in S$的均衡集。

定理2　对任意$\bar{J}_0\in G$,可行函数集S的均衡集G的水平集$G(J_0)=\{J\in G|J\leqslant J_0\}$是闭集,故均衡集$G$存在最小值$J^*$。

定义5　设J^*是G的最小值,如果$s^*\in S$,对任意$s\in S$满足$J_i(s^*)-J_i(s)\leqslant J^*(I=1,2,\cdots,N)$,则称$s^*\in S$是$(P)$的$J^*$最优均衡解,$J^*$是问题$(P)$的最优均衡值。显然,最优均衡值$J^*$是每个局中人针对自己的支付函数给出的最小统一妥协值。最优均衡值J^*是惟一的,但对应的最优均衡解s^*不一定惟一。

2　主要结论

定理3　设$f,h_i,g_i(i=1,2,\cdots,N)$满足假设条件式(1)－式(4),控制集$U_i(i=1,2,\cdots,N)$是凸集,则由所有$J^*$最优均衡解构成的集合是凸集。$J^*$最优均衡解集与 Pareto 最优解集的凸本质连通区等价。如果 Hamilton 函数均关于(x,u_i)是严格凸函数,$g_i(x)$关于x是严格凸函数,则问题(P)存在惟一J^*最优均衡解。

证明　显然泛函$J_i(i=1,2,\cdots,N)$是凸泛函,可行函数集S是凸集。设s_1^*,s_2^*,是问题(P)的J^*最优均衡解,则对任意$s\in S$,$J_i(s_1^*)-J_i(s)\leqslant J^*$,$J_i(s_2^*)-J_i(s)\leqslant J^*(i=1,2,\cdots,N)$。对任意$\theta\in(0,1)$,$\theta s_1^*+(1-\theta)s_2^*\in S$,并且满足$J_i(\theta s_1^*+(1-\theta)s_2^*)\leqslant\theta J_i(s_1^*)+(1-\theta)J_i(s_2^*)(i=1,2,\cdots,N)$,因此对任意$s\in S$有$J_i(\theta s_1^*+(1-\theta)s_2^*)\leqslant\theta(J^*+J_i(s))+(1-\theta)(J^*+J_i(s))=J^*+J_i(s)$,显然$\theta s_1^*+(1-\theta)s_2^*)$也是问题$(P)$的$J^*$最优均衡解,故$J^*$最优均衡解构成的集合是凸集。$J^*$最优均衡解集是凸本质连通区域是显然的[2],以下证明它与 Pareto 最优解集等价。

设$s^*=(x^*,u_1^*,u_2^*,\cdots,u_N^*)$是问题$(P)$的$J^*$最优均衡解,$s_i^*$是问题$(P_i)$的最优解,如果$J^*=0$,则$J_i(s^*)=J_i(s_i^*)(i=1,2,\cdots,N)$,$s^*$是问题$(P)$的绝对最优解,因此,$s^*$是问题$(P)$的 Pareto 最优解[6,7]。

如果$J^*>0$,则$J_i(s^*)>J_i(s_i^*)$且$J^*=J_i(s^*)-J_i(s_i^*)$ $(i=1,2,\cdots,N)$,假设s^*不是问题(P)的 Pareto 最优解,则至少存在一个$j\in\{1,2,\cdots,N\}$(不妨设只有一个并且$j=1$),存在$v_1\in U_1$,$s_1=(x_{v1}^*,v_1,u_2,\cdots,u_N)\in S$,使得$J_1(s_1)<J_1(s^*)$[6,7]。定义水平开集$S_i=\{s|J_i(s)<J^*+J_i(s_i^*)\}(i=1,2,\cdots,N)$,易证明$S_i$是凸紧集,$S_i$的闭包$\bar{S}_i$也是凸紧集,$s^*$是$S_i$的边界点,$s^*\in\bar{S}_i$。由定义5,$\bigcap\limits_{i=1}^{N}\bar{S}_i$是非空凸紧集并且就是问题$(P)$的$J^*$－最优均衡解集。由于$J_1$是凸连续泛函,故对任意$\theta\in(0,1)$有$J_1(\theta s_1+(1-\theta)s^*)\leqslant\theta J_1(s_1)+(1-\theta)J_1(s^*)<J_1(s^*)$。由于$\bar{S}_1\cap\bar{S}_2$是非空凸紧集,$s^*$是$\bar{S}_1\cap\bar{S}_2$的边界点,故存在以$s^*$为中心以$\delta_1>0$为半径的闭球$B(s^*,\delta_1)$以及$0<\theta_1<1$,使得当$0<\theta_2<\theta_1$时,$s_2=\theta_2 s_1+(1-\theta_2)s^*\in B(s^*,\delta_1)\cap\bar{S}_1\cap\bar{S}_2$,$J_i(s_2)<J_i(s^*)(i=1,2)$。

同理可证存在闭球$B(s^*,\delta_2)$,其中$\delta_2>0$,以及$0<\theta_3<1$,使得$s_2=\theta_3 s_1+(1-\theta_3)s^*\in B(s^*,\delta_2)\cap\bar{S}_1\cap\bar{S}_2\cap\bar{S}_3$,$J_i(s_2)<J_i(s^*)(i=1,2,3)$。依次类推,存在闭球$B(s^*,\delta_{N-1})$,其中$\delta_{N-1}>0$,以及$0<\theta_N<1$,使得$s_N=\theta_N s_{N-1}+(1-\theta_N)s^*\in B(s^*,\delta_{N-1})\cap S_1\cap\cdots\cap S_N$;$J_i(s_N)<J_i(s^*)(i=1,2,\cdots,N)$。

令$\Delta J^*=\min\limits_i\{J_i(s^*)-J_i(S_n)\}>0$,易证$s_N$是问题$(P)$的$(J^*-\Delta J^*)$均衡解,故$s^*$不是问题$(P)$的$J^*$最优均衡解,矛盾。所以$s^*$是问题$(P)$的 Pareto 最优解。

若 s^* 是问题(P)的 Pareto 最优解,假设 s^* 不是问题(P)的 J^* 最优均衡解,s_0^* 是 J^* 最优均衡解,设 s^* 的均衡集合为 G^*,由定理 1 必存在最小均衡值 J' 。而 $J'>J^*$,否则 s^* 是 J^* 最优均衡解。因此,由定理 2 可知 $J_i(s_0^*)<J_i(s^*)$ $(i=1,2,\cdots,N)$,则 s^* 不是问题(P)的 Pareto 最优解,矛盾。s^* 是问题(P)的 J^* 最优均衡解。

在定义了最优均衡解的前提下,由定理 3 以及文献[1,8],可以构造与求解问题(1)-(2)的 Pareto 最优解等价的单目标最优控制问题。

定理 4 如果问题(P_i)存在最优目标值 J_i^* $(i=1,2,\cdots,N)$,则 s^* 是问题(P)的 J^* 最优均衡解的充分必要条件是 $(s^*,J^*)\in S\times R_+$ 是问题($\overline{P}$)

$$\min J \tag{6}$$

$$\text{s. t. } J_i(s)-J_i^*\leqslant J(i=1,2,\cdots,N);(s,J)\in S\times R_+ \tag{7}$$

的最优轨线、最优控制以及最优目标值。

3 结束语

对多人合作微分对策问题(P),通过求解一个单目标最优控制问题求出与 Pareto 最优解等价的 J^* 最优均衡解。该方法克服了传统方法的种种局限性,将复杂问题变简单了。

参考文献:

[1] 孟志青,胡奇英.群体决策问题的一种最优均衡解[J].系统科学与数学,2004,24(1):28-33.

[2] Yang H, Yu J. On Essential Components of the Set of Weakly Pareto-Nash Equilibrium Points [J]. Applied Mathematical Letter, 2002, 15 (3): 553-560.

[3] Weeren A J T M, Schumacher J M, Engwerda J C. Asymptotic Analysis of Linear Feedback Nash Equilibrium in Nonzero-Sum Linear Quadratic Differential Games[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 101(3): 693-722.

[4] Engwerda J C. Feedback Nash Equilibrium in the Scalar Infinite Horizon LQ-Games[J]. Automatic Control, 2000, 36 (1): 135-139.

[5] Bensoussan A. Stochastic Games for N Players [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 105 (3): 567-589.

[6] 李登峰.微分对策及其应用[M].北京:国防工业出版社,2002.

[7] 张学铭,李训经.最优控制系统的微分方程理论[M].北京:高等教育出版社,1989.

[8] 李炳杰,周宏安.多目标分层规划问题的最优均衡值序列算法[J].空军工程大学学报(自然科学版),2005,6 (1):83-87.

(编辑:田新华)

An Optimal Equilibrium Payment Algorithm for Pareto Optimal Solutions of Many-person Differential Games

KOU Guang-xing1, LI Bing-jie1,2, ZHAO Hui-wen2

(1. The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China; 2. School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: The conceptions called optimal equilibrium payment and optimal equilibrium solution for many-person differential games are introduced. The optimal equilibrium solutions set is a connected convex set consisting of the Pareto optimal solutions in a certain convex condition. This result proves that the optimal solutions of games problem are equivalent to the solutions of single object optimal control problem. The optimal strategies of games problem under different weights can also be obtained by means of this algorithm. This algorithm gives a simple and new way to solve the many-person cooperative differential games.

Key words: differential games; optimal equilibrium solution; Pareto optimal solution; Hamilton-Jacobi equation