

基于聚类分析和区间判断矩阵 AHP 的群组评价

叶志铨¹, 郭庆丰², 高彬³

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 空军装备研究院 雷达与电子对抗研究所, 北京 100085; 3. 北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100083)

摘要:把区间模糊数的一些基本理论引入到 AHP 群组评价中, 并利用聚类分析方法来确定专家权重系数, 得到一种便捷的群组评价算法。最后结合实例, 对该方法具体的应用作了介绍, 根据该算法计算的结果合理、准确。

关键词:群组 AHP; 聚类分析; 对数最小二乘法

中图分类号: O221 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009 - 3516(2006)02 - 0064 - 03

数学家 Thomas L. Saaty 提出的 AHP (Analytic Hierarchy Process)^[1] 方法将定性分析和定量分析有效结合, 为诸多领域中的多规则决策问题提供了强有力的数学支持。对于系统型决策问题, 涉及到众多的专业领域和广泛的社会因素, 必须由若干决策者组成决策群进行群组决策, 目前国内外学者研究群组 AHP 排序主要提出判断矩阵元素的几何平均法和算术平均法以及排序权值的几何平均法和算术平均法^[2]。本文采用聚类分析方法, 将专家个体排序向量进行系统聚类, 根据聚类结果确定专家权重系数; 同时, 基于区间数特征向量法^[3], 把单判断矩阵的 AHP 对数最小二乘法扩展到群组多判断矩阵情况, 得到基于区间模糊数理论的模糊 AHP 群组评价的排序算法。

1 专家权重系数的确定

利用模式识别的理论方法, 把专家个体排序向量看作待识别的样品, 采用系统聚类法将相似的专家个体排序向量归并成类, 先把所有个体样本各自视为一类, 逐级聚合成一类。关键是类间相似性度量方法以及决定聚合停止的阈值的确定。设评价对象为 n 个, 参加评价的专家 m 个, 第 i 个专家在某一准则层下, 给出的判断矩阵为 A_i , 由 A_i 求出的个体排序向量为 $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})^T$, ($i = 1, 2, \dots, m$) 个体排序向量 U_i 和 U_j 之间的相似性测度采用夹角余弦定义: $c(i, j) = [\sum_{k=1}^n u_{ki} u_{kj}] / [(\sum_{k=1}^n u_{ki}^2) \times \sum_{k=1}^n u_{kj}^2]^{1/2}$ 。据相似系数判断两个个体排序向量的相似程度: $c(i, j)$ 越接近于 1, 说明第 i 个专家与第 j 个专家的个体排序向量越相似。将 U_i ($1 \leq i \leq m$) 分为 t 类: $S_1, S_2, \dots, S_t, S_p$ 和 S_q 的重心分别是 \bar{S}_p 和 \bar{S}_q , 则 S_p 和 S_q 间相似性测度定义为 \bar{S}_p 和 \bar{S}_q 两向量间的夹角余弦。关于聚类停止问题, 给出一种相似性测度的阈值 T 作为分类临界值。

确定权重时, 对同类中的个体排序向量所表达的评价信息认为是相似的。而属于异类的评价信息认为不相似。假设将 m 个个体排序向量聚集成 t 个类别, 类别 S_p 包含个体排序向量为 n_p 个, 类别 S_p 中包含的个体排序向量个数 n_p 与个体排序向量总数 m 的比值, 称为类别 S_p 中所有个体排序向量的置信因子 $\gamma_p = n_p/m$, 即专家 i 的权重系数 λ_i 与个体排序向量 γ_i 的置信因子 γ_i 成正比 $\lambda_i = \alpha \gamma_i$ (α 为比例系数), $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $\lambda_1: \lambda_2: \dots: \lambda_m = \gamma_1: \gamma_2: \dots: \gamma_m$, 所以 $\lambda_i = n_p / \sum_{q=1}^t n_q^2$ 。

收稿日期: 2004 - 12 - 13

作者简介: 叶志铨(1940 -), 男, 浙江建德人, 教授, 主要从事雷达和电子对抗研究。

2 群组 AHP 中的排序算法

2.1 区间数及其基本运算

定义 2.1 记 $a = [a^-, a^+] = \{x | 0 \leq a^- \leq x \leq a^+\}$, 称 a 为一正闭区间数, 简称区间数。

区间数是模糊数, 且可看作是一种特殊的梯形模糊数 (a^-, a^-, a^+, a^+) , 因此根据梯形模糊数的运算法则, 得到区间数的运算法则如下: ① $a + b = [a^- + b^-, a^+ + b^+]$; ② $ab = [a^- b^-, a^+ b^+]$ 特别地 $\lambda a = [\lambda a^-, \lambda a^+]$, $\lambda \in R$; ③ $a/b = [a^-/b^+, a^+/b^-]$, 特别地 $1/b = [1/b^+, 1/b^-]$ 。

2.2 基于区间模糊数理论的群组 AHP 评价算法

记 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间判断矩阵, $a_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$, 特别地, 如果 $a_{ij}^- = a_{ij}^+$ 那么称 A 为一数判断矩阵。

假设 m 个专家参与决策, 其每人所得的区间判断矩阵分别记为 A_1, A_2, \dots, A_m , 其中, $A_l = (a_{ijl})_{n \times n}$, $a_{ijl} = [a_{ijl}^-, a_{ijl}^+]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。在 AHP 法的同层次求单权重步骤中, 可以采用对数最小二乘法^[3], 即对式(1)求其最小值。得出一个量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$, 将其归一化后, 得 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 。

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\ln a_{ij} - \ln(\omega_i/\omega_j)]^2 \quad (1)$$

定义 2.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间判断矩阵, 如果存在一个一致性矩阵 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 使得式(2)成立:

$$\min F = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ln a_{ijl}^- + \ln a_{ijl}^+ - 2 \ln b_{ij} \quad (2)$$

那么称 B 为关于区间判断矩阵 A_1, A_2, \dots, A_m 的准最佳一致性数判断矩阵。

为求式(2)中 F 的最小值, 将式(2)两边对 $\omega_p = (p = 1, 2, \dots, n)$ 取偏导数, 并使其等于 0, 化简可得:

$$\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n (\ln a_{pj1}^- + \ln a_{pj1}^+ - 2 \ln \omega_p + 2 \ln \omega_j) - \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n (\ln a_{ip1}^- + \ln a_{ip1}^+ - 2 \ln \omega_j + 2 \ln \omega_p) = 0, \text{ 得 } \omega_p = \left[\prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^n \omega_j \right]^{1/nm} \left[\prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^n a_{pj1}^- a_{pj1}^+ \right]^{1/2nm}。$$

在综合了 m 位专家参考意见后获得的一个综合判断矩阵, 向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 的归一化结果即可作为群组 AHP 判断矩阵的权重排序向量, 但是这是在假设专家各自判断矩阵权重相等的情况下得到的, 考虑各专家权重不同的情况, 令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 表示 m 位专家各自的权重, 且 $\sum_{l=1}^m \lambda_l = 1$, 则式(2)变为 $\min F$

$$= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_l (\ln a_{ijl}^- + \ln a_{ijl}^+ - 2 \ln b_{ij})^2, \text{ 参照上面化简步骤可得归一化向量及其一致性数判断矩阵为}$$

$$w_p = \frac{\left[\prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^n (a_{pj1}^- a_{pj1}^+) \right]^{1/2n}}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^n (a_{ijl}^- a_{ijl}^+) \right]^{1/2n}}, p \in [1, n], b_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} = \left[\prod_{l=1}^m \prod_{p=1}^n \left(\frac{a_{ip1}^- a_{ip1}^+}{a_{jp1}^- a_{jp1}^+} \right)^{\lambda_l} \right]^{1/2n}, i, j \in [1, n] \quad (3)$$

2.3 群组评价步骤

①确定评审人员或评审小组, 建立评价问题的阶梯模型; ②由上至下, 由 m 个专家分别确定每层的区间模糊判断矩阵 A_l , 利用文献[4]计算每位专家所建判断矩阵的排序向量 $U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})^T$, ($i = 1, 2, \dots, m$); ③利用聚类分析法确定专家的权重系数; ④由式(3)计算每层指标归一化权重向量值; ⑤最后, 综合每层下综合权重向量计算最终排序向量, 按总权值大小划分各方案等级。

3 实例分析与结论

以某战术级防空 C³I 系统的效能评估为例, 现在需要确定其信息传输、处理、显示能力, 可靠性和实用性等 5 个指标的权重值, 10 位专家对系统 5 个方面性能比较判断见表 1, 由于判断矩阵的对称性, 这里仅列出了判断矩阵的右上三角形的量值。采用本文算法, 编程解算。

根据表 1, 10 个判断矩阵采用模糊 AHP 法求得其专家个体排序向量分别为

$$U_1 = (0.1898, 0.1278, 0.2031, 0.1729, 0.1660)^T, U_2 = (0.1557, 0.0795, 0.0393, 0.4753, 0.2360)^T;$$

$U_3 = (0.333\ 8, 0.146\ 6, 0.097\ 8, 0.327\ 0, 0.084\ 9)^T$, $U_4 = (0.343\ 8, 0.153\ 1, 0.111\ 3, 0.299\ 9, 0.087\ 3)^T$;
 $U_5 = (0.212\ 9, 0.129\ 4, 0.043\ 7, 0.473\ 0, 0.126\ 6)^T$, $U_6 = (0.392\ 9, 0.160\ 5, 0.073\ 0, 0.313\ 4, 0.063\ 4)^T$;
 $U_7 = (0.367\ 8, 0.147\ 7, 0.108\ 4, 0.308\ 9, 0.065\ 9)^T$, $U_8 = (0.364\ 9, 0.142\ 9, 0.107\ 5, 0.317\ 7, 0.065\ 4)^T$;
 $U_9 = (0.375\ 3, 0.326\ 3, 0.143\ 4, 0.102\ 2, 0.051\ 4)^T$, $U_{10} = (0.369\ 6, 0.162\ 6, 0.086\ 8, 0.324\ 5, 0.040\ 0)^T$ 。

表 1 准则层 5 个指标对总目标的右上三角判断值

No	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{34}	a_{35}	a_{45}
1	[2,3]	[1,2]	[2,4]	[1/4,1/2]	[2,4]	[1/4,1/2]	[1/4,1/2]	[1,2]	[4,6]	[2,4]
2	[2,4]	[6,8]	[1/6,1/4]	[1/4,1/2]	[2,4]	[1/6,1/4]	[1/4,1/2]	[1/7,1/6]	[1/6,1/4]	[2,4]
3	[2,4]	[2,4]	[1,2]	[2,4]	[1,2]	[1/4,1/2]	[2,4]	[1/6,1/4]	[1,2]	[2,4]
4	[2,4]	[2,4]	[1,2]	[2,4]	[1,2]	[1/4,1/2]	[2,4]	[1/4,1/2]	[1,2]	[2,4]
5	[2,4]	[4,6]	[1/4,1/2]	[1,2]	[4,6]	[1/6,1/4]	[1,2]	[1/6,1/4]	[1/6,1/4]	[4,6]
6	[2,4]	[4,6]	[1,2]	[4,6]	[2,4]	[1/4,1/2]	[2,4]	[1/6,1/4]	[1,2]	[4,6]
7	[2,4]	[2,4]	[1,2]	[4,6]	[1,2]	[1/3,1/2]	[2,4]	[1/4,1/2]	[1,2]	[4,6]
8	[2,4]	[2,4]	[1,2]	[4,6]	[1,2]	[1/4,1/2]	[2,4]	[1/4,1/2]	[1,2]	[4,6]
9	[1,2]	[2,4]	[3,5]	[4,6]	[2,4]	[3,5]	[4,6]	[1,3]	[4,6]	[2,4]
10	[2,4]	[2,4]	[1,3]	[6,7]	[2,4]	[1/4,1/2]	[4,6]	[1/6,1/4]	[2,4]	[6,7]

由个体排序向量和相似性系数 $c(i,j)$ 的计算公式可得相似性测度矩阵的下三角阵 $D^{(0)}$, 合并相似性系数最大的两类为新类。在 $D^{(0)}$ 中相似性系数最大的为 $c(7,8) = 0.998$, 合并专家 7 和 8 组成新类 $D_{11} = \{7, 8\}$, 原类中 7 和 8 数值从 $D^{(0)}$ 中删除。基于最大相似性系数法, 依次算出其余分类和新类 $D_{11} = \{7, 8\}$ 的最大相似性系数以组成降一阶的相似性测度矩阵 $D^{(1)}$, 重复上述步骤直到聚合为一大类为止。输入阈值 $T = 0.95$, 最终可聚为 4 类: $\{7, 8, 4, 3, 6, 10\}$ 、 $\{2, 5\}$ 、 $\{1\}$ 和 $\{9\}$ 。根据聚类结果, 可得专家的权重系数分别为: $\lambda_1 = 1/42, \lambda_2 = 1/21, \lambda_3 = 1/7, \lambda_4 = 1/7, \lambda_5 = 1/21, \lambda_6 = 1/7, \lambda_7 = 1/7, \lambda_8 = 1/7, \lambda_9 = 1/42, \lambda_{10} = 1/7$ 。由专家判断矩阵和专家权重值, 采用本文所述的基于 AHP 和区间模糊数理论的群组评价算法, 由式(3)计算得到 C³I 系统评估准则层的权重为: $w = [0.2769, 0.1840, 0.1448, 0.2646, 0.1279]$ 。

本文运用聚类分析理论确定专家的权重系数, 充分体现了少数服从多数的原则; 基于区间模糊数理论, 把 AHP 中对数最小二乘法从单判断矩阵扩展应用到群组 AHP 领域, 此方法计算简捷, 实用性强, 适宜推广。

参考文献:

[1] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: McGraw - Hill Inc, 1980.
 [2] 王应明. 地区工业综合评价方法研究[D]. 南京: 东南大学管理学院, 1991.
 [3] 魏毅强, 刘进生, 王绪柱. 不确定 AHP 中判断矩阵的一致性概念及权重[J]. 系统工程理论与实践, 1994, (4): 16 - 22.
 [4] 魏世孝, 周献中. 多属性决策理论方法及其在 CI 系统中的应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.

(编辑: 姚树峰)

Group - evaluation Based on Cluster Analysis and Interval Judgment Matrix AHP

YE Zhi - quan¹, GUO Qing - feng², GAO Bin³

(1. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China; 2. The Radar and EW Research Institute, AFEA, Beijing 100085, China; 3. School of Electronics and Information Engineering, BUAA, Beijing 100083, China)

Abstract: The basic theory of interval number is introduced into the group Analytic Hierarchy Process (AHP), and the expert weight coefficients are determined according to the cluster analysis principle, so a simple and convenient group AHP is obtained. The use of this new method shows that it is easier for the evaluation team to obtain impartial and reasonable results. A living example demonstrates the arithmetic application of the algorithm and the results are reasonable and accurate.

Key words: group AHP; cluster analysis; logarithmic least square method