第 7 卷第 1 期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol. 7 No. 1
2006 年 2 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Feb. 2006

基于图论和多目标规划的兵力机动路线优化

张要一[1]， 王颖龙[1]， 刘付显[1]， 董航远[2]

(1. 空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800;2. 空军工程大学 科研部，陕西 西安 710051)

摘　要:研究在最短时间和最大生存概率等两重目标约束下的兵力机动路线优化问题。首先介绍最短路问题的数学模型及 Dijkstra 算法,然后将求最大生存概率路目标约束转化为求最短路问题,随之建立多目标规划模型,并描述了用 STEM 算法进行求解的过程。最后用实例验证了模型和算法的可用性。

关键词:兵力机动路线优化;图论;多目标规划

中图分类号: O221　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009 - 3516(2006)01 - 0035 - 04

兵力机动是一种重要的作战行动,其目的是提高作战的主动性和攻防能力[1]。兵力机动往往有多种路线可以选择,不同的路线其路况不一,决定其所用时间不同[2]。在作战环境下,选择不同的路线进行机动被敌人发现并受到攻击的概率也不一样。由此可知,对机动路线的选择是一个多目标规划问题。本文应用图论中的 Dijkstra 算法分别计算了转移时间最短和生存概率最大的路线,然后用多目标规划的 STEM 算法对路线选择进行了优化,得出了比较合理的结论。

1　最短路问题的数学模型及 Dijkstra 算法

给定一个非空的简单有向网络 $D = (V, A, w, p)$,如图 1 所示。其中:V 为顶点集,$V = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$;$A$ 为有向弧集,$A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \cdots, (v_i, v_j), \cdots\}$;$w$ 和 p 为有向弧上的权值,在本文中分别表示时间和生存概率值,设定 w 和 p 均为非负值,并定义 $P \in [0,1]$ 。有向弧(v_i, v_j)上权向量的第一个值为 w_{ij} 即转移时间,第二个值为 p_{ij} 即生存概率。由此,可以写出求 D 中最短(v_1, v_n)路的线性规划模型:

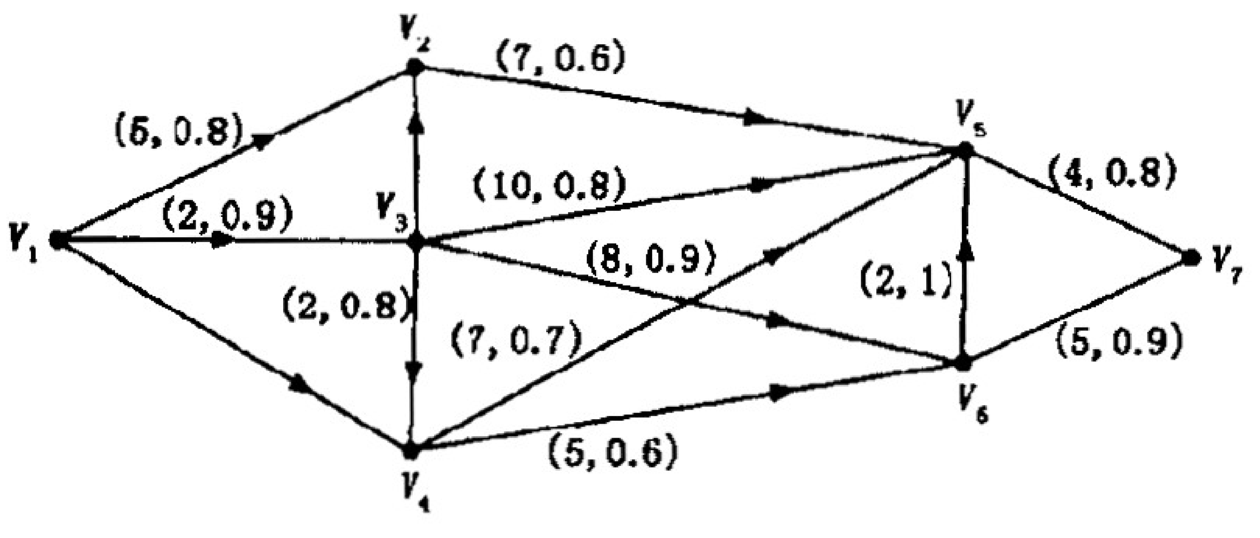

图 1　兵力机动路线

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{(v_i, v_j) \in A} w_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t.} \sum\limits_{v_j \in N^+(v_i)} x_{ij} - \sum\limits_{v_j \in N^-(v_i)} x_{ji} = \begin{cases} 1, i = 1 \\ 0, 2 \leqslant i \leqslant n - 1 \\ -1, i = n \end{cases} \\ x_{ij} > 0, \forall (v_i, v_j) \in A \end{cases} \tag{1}$$

其对偶问题为

$$\begin{cases} \max(y_1 - y_n) \\ \text{s. t.} \quad y_i - y_j \leqslant w_{ij}, \forall (v_i, v_j) \in A \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2005 - 03 - 04
基金项目:高等学校骨干教师资助计划项目(GG - 1105 - 90039 - 1004)
作者简介:张要一(1979 -),男,山东临沂人,博士生,主要从事防空作战指挥运筹研究;
王颖龙(1945 -),男,陕西富平人,教授,博士生导师,主要从事防空作战指挥运筹研究;
刘付显(1962 -),男,山东菏泽人,教授,主要从事防空作战规划与对策研究.

令 $u_i = y_1 - y_i, i = 1,2,\cdots,n$, 则式(2) 化为

$$\begin{cases} \max u_n \\ \text{s.t.} \quad u_1 = 0 \\ u_i - u_j \leqslant w_{ij}, \forall (v_i,v_j) \in A \end{cases} \tag{3}$$

可以证明式(3) 等价下式:

$$\begin{cases} u_{k_1} = 0 \\ u_{k_j} = \sum_{i<j} \{u_{k_i} + w_{k_ik_j}\}, 2 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \tag{4}$$

由文献[3] 可知式(4) 的解 u_{k_j} 是 D 中最短 (v_1,v_{k_j}) 路的权 $(j = 1,2,\cdots,n)$,由此可以给出求解非负权网络的最短路算法即 Dijskstra 算法,求解步骤为

Step 0　令 $u_1 = 0, u_j = w_{1j} (j = 2,3,\cdots,n), S = \{v_1\}, R = \{v_2,v_3,\cdots,v_n\}$;

Step 1　取 $v_i \in R$,使 $u_i = \min\limits_{v_j} u_j$. 若 $u_i = \infty$,停止,从 v_1 到 R 中各顶点都没有路;否则转 Step 2;

Step 2　令 $S := S \cup \{v_i\}, R := R \setminus \{v_i\}$,若 $R = \varnothing$,结束,u_j 为 D 中最短 (v_1,v_j) 路的权 $(j = 1,2,\cdots,n)$;否则,转 Step 3;

Step 3　$\forall v_j \in \min\{u_j, u_i + w_{ij}\}$,转 Step 1。

2　求最大生存概率路问题转化为求最短路问题

在有向网络 $D = (V,A,w,p)$ 中,任意一条从 v_1 到 v_n 的路 $P = v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的生存概率定义为 P 上所有弧的生存概率的乘积,即

$$p(P) = \prod_{(v_i,v_j) \in A(p)} p_{ij}$$

D 中的所有 (v_1,v_n) 路中生存概率最大的路即为最大生存概率 (v_1,v_n) 路。

如果 $\forall (v_i,v_j) \in A(D)$,令 $q_{ij} = -\log p_{ij}$,则 D 中最大生存概率 (v_1,v_n) 路等价于 D 中关于 q 的最短 (v_1, v_n) 路,从而可以用 Dijkstra 算法进行求解。

3　兵力机动路线优化的多目标线性规划模型及其解法

3.1　多目标线性规划模型

兵力机动转移路线选择要满足主要两个目标,一是转移时间最短,二是生存概率最大。根据上面的叙述,两个目标均为线性规划问题,因此,可以建立多目标线性规划模型如下:

$$\begin{cases} \min w_0 = \sum\limits_{(v_i,v_j) \in A} w_{ij} x_{ij} \\ \min q_0 = \sum\limits_{(v_i,v_j) \in A} q_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \sum\limits_{v_j \in N^+(v_i)} x_{ij} - \sum\limits_{v_j \in N^-(v_i)} x_{ji} = \begin{cases} 1, i = 1 \\ 0, 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ -1, i = n \end{cases} \\ x_{ij} > 0, \forall (v_i,v_j) \in A \end{cases} \tag{5}$$

式中各符号的意义同上。

3.2　STEM 算法

STEM(step method) 算法是一种迭代法,适用于求解多目标线性规划问题[4]。在求解过程中,每进行一步,分析者把计算结果告诉决策者,决策者对计算结果做出评价判断。如果认为已经满意了,则迭代停止;否则分析者再根据决策者的意见进行修改和再计算,如此直到求得决策者认为满意的解为止。故也称此法为对话式方法。它能有效地结合军事指挥员的个人经验和判断能力,从而得到较合理的目标值。其求解步骤为:

Step 0　分别用 Dijkstra 算法求单目标线性规划问题的解,得到最优解 $x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}$ 和相应的两组目标函数

值,分别为$[w_0^{(1)},q_0^{(1)}]$,$[w_0^{(2)},q_0^{(2)}]$。令$w_0^*=\min\{w_0^{(1)},w_0^{(2)}\}$,$W_0^*=\max\{w_0^{(1)},w_0^{(2)}\}$,$q_0^*=\min\{q_0^{(1)},q_0^{(2)}\}$,$Q_0^*=\max\{q_0^{(1)},q_0^{(2)}\}$,转Step1。

Step1　求权系数。为了找出目标函数值的相对偏差以及消除不同目标值的量纲不同的问题,进行如下处理:

$$\alpha_1=\frac{W_0^*-w_0^*}{W_0^*}\frac{1}{\sqrt{\sum_{(v_i,v_j)\in A}(w_{ij})^2}},\alpha_2=\frac{Q_0^*-q_0^*}{Q_0^*}\frac{1}{\sqrt{\sum_{(v_i,v_j)\in A}(q_{ij})^2}}$$

经归一化后,得权系数

$$\pi_i=\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2},\quad i=1,2$$

Step 2　构造以下线性规划问题,并求解:

$$\begin{cases}\min\lambda\\ \text{s. t.}\quad \lambda\geqslant(\sum_{(v_i,v_j)\in A}w_{ij}x_{ij}-w_0^*)\pi_1\\ \qquad\quad \lambda\geqslant(\sum_{(v_i,v_j)\in A}q_{ij}x_{ij}-q_0^*)\pi_2\\ x_{ij}\geqslant 0,\forall(v_i,v_j)\in A,\lambda\geqslant 0\end{cases}\tag{6}$$

假定求得的解为$\bar{x}_{ij}^{(1)}$,相应的目标函数值为$\bar{w}_0^{(1)}$,$\bar{q}_{ij}^{(1)}$。如果为决策者的理想解$x_{ij}^{(1)}$,其相应的目标函数值为$w_0^{(1)}$、$q_0^{(1)}$,这时决策者将目标值进行比较后,认为满意了就可以停止计算。若认为相差太远,则考虑适当修正。若考虑对第1个目标宽容一下,即减少或增加一个Δw,并令第1个目标的权系数$\pi_1=0$,表示降低这个目标的要求,再求解线性规划问题

$$\begin{cases}\min\lambda\\ \text{s. t.}\quad \lambda\geqslant(\sum_{(v_i,v_j)\in A}q_{ij}x_{ij}-q_0^*)\pi_2\\ \qquad\quad \sum_{(v_i,v_j)\in A}w_{ij}x_{ij}\leqslant\sum_{(v_i,v_j)\in A}w_{ij}\bar{x}_{ij}^{(1)}+\Delta w\\ x_{ij}\geqslant 0,\forall(v_i,v_j)\in A,\lambda\geqslant 0\end{cases}\tag{7}$$

若求得的解为$\bar{x}_{ij}^{(2)}$,再与决策者对话,直到决策者满意为止。

4　实例分析

设问题为求解1个战术单位的兵力机动,要从v_1点机动至v_7点,中间有多种路线可选,每条路线标有转移所需时间和生存概率的估计,如图1所示。将生存概率取对数并求相反值,可得数据如图2所示。用Dijkstra算法求得目标函数值分别为

目标函数值1:$w_0^{(1)}=14$,选择有向路$P_1=v_1v_3v_4v_6v_7$,最优解$x_{ij}^{(1)}=\{x_{13},x_{34},x_{46},x_{67}\}=\{1,1,1,1\}$,对应$q_0^{(1)}=q_{13}+q_{34}+q_{46}+q_{67}=0.046+0.097+0.222+0.046=0.401$。生存概率$p_0^{(1)}=0.388\ 8$。

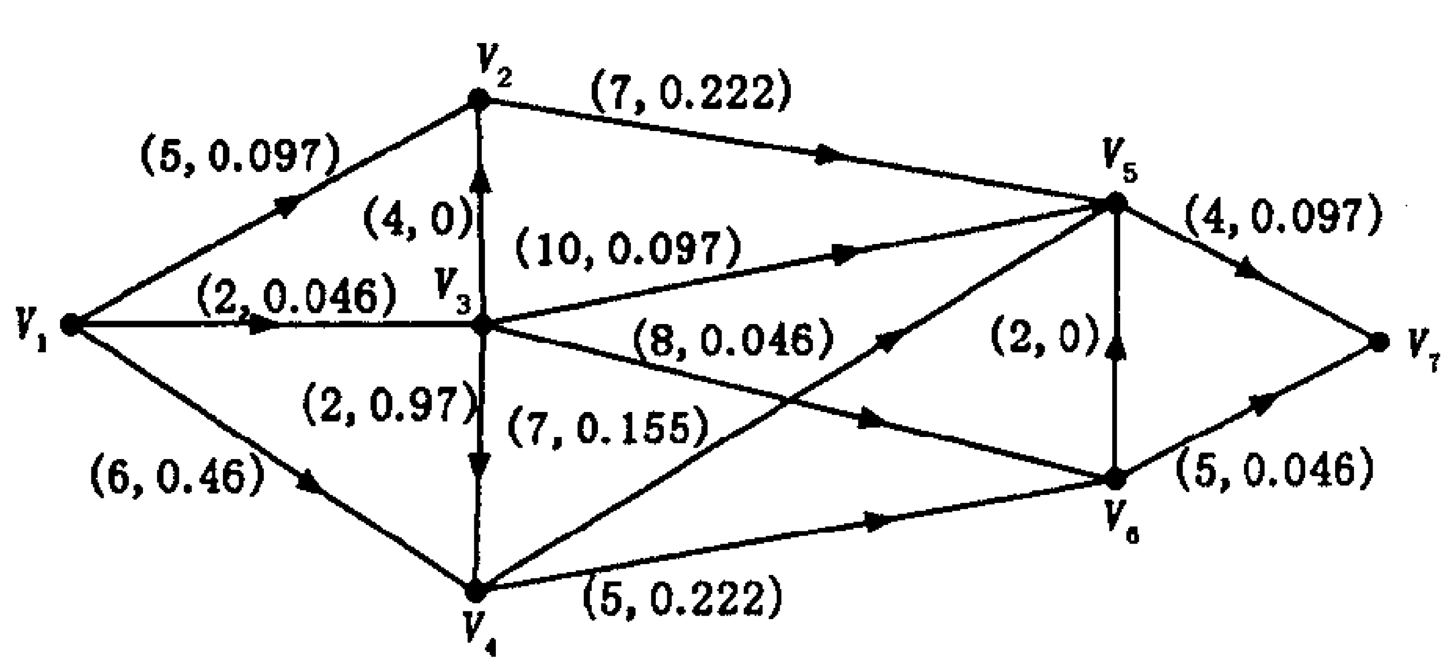

图2　转化后的兵力机动路线

目标函数值2:$q_0^{(2)}=0.138$($p_0^{(2)}=0.729$),选择有向路$P_2=v_1v_3v_6v_7$,最优解$x_{ij}^{(1)}=\{x_{13},x_{36},x_{67}\}=\{1,1,1\}$,对应的转移时间为$w_0^{(2)}=w_{13}+w_{36}+w_{67}=2+8+5=15$。

由此可求得$\alpha_1=0.003\ 868$,$\alpha_2=1.596\ 9$;$\pi_1=0.002\ 42$,$\pi_2=0.997\ 58$。

求解以下线性规划问题:

$$\begin{cases}\min\lambda \\ \text{s. t.}\quad \lambda \geqslant 0.002\,42(\sum\limits_{(v_i,v_j)\in A} w_{ij}x_{ij} - 14) \\ \qquad\ \lambda \geqslant 0.997\,58(\sum\limits_{(v_i,v_j)\in A} q_{ij}x_{ij} - 0.138 \\ x_{ij} \geqslant 0,\ \forall (v_i,v_j) \in A, \lambda \geqslant 0\end{cases} \tag{8}$$

由此,可求得解为 $\bar{x}_{ij}^{(2)} = \{x_{13},x_{36},x_{67}\} = \{1,1,1\}$,相应的目标函数值为 $\bar{w}_0^{(1)} = 15$, $\bar{q}_0^{(1)} = 0.138$($\bar{p}_0^{(1)} = 0.729$)。分析者将计算结果告诉决策者,决策者将其与理想值$[w_0^{(1)}, q_0^{(2)}(p_0^{(2)})] = [14, 0.138(0.729)]$进行比较,认为求得的结果基本满意。若他提出将 w_0 提高到 15,以便降低 q_0。此时线性规划问题修改为

$$\begin{cases}\min\lambda \\ \text{s. t.}\quad \lambda \geqslant 0.997\,58(\sum\limits_{(v_i,v_j)\in A} q_{ij}x_{ij} - 0.138) \\ \qquad \sum\limits_{(v_i,v_j)\in A} w_{ij}x_{ij} \leqslant 15 \\ x_{ij} \geqslant 0,\ \forall (v_i,v_j) \in A, \lambda \geqslant 0\end{cases} \tag{9}$$

由此,可求得解与式(8)解相等。此时决策者对结果满意,则停止计算。

5 结论

兵力机动问题是一个多目标规划问题,其两个主要目标最短时间和最大生存概率均可转化为求最短路问题。Dijkstra 算法是比较成熟的求非负权网络最短路问题的算法,且是一种多项式算法[5]; STEM 算法是一种对话式算法,二者均易于在计算机上实现。因此,研制兵力机动路线优化的辅助决策支持系统是可行的,并且也是必需的,这必将会大大提高指挥员的决策水平,有力地保证兵力机动决策的快速性和有效性。

参考文献:

[1] 铁 鑫,李为民,刘玉全. 多梯队编组的地空导弹部队兵力机动新模式[J]. 空军工程大学学报(自然科学版)2004,5(4):40-42.
[2] 王 洁,娄寿春,王颖龙. 地空导弹火力单元最佳兵力机动线路的选择[J]. 系统工程与电子技术,2003,25(1):56-60.
[3] 谢 正. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2003.
[4] 钱颂迪. 运筹学(修订版)[M]. 北京:清华大学出版社,1990.
[5] 杨 超,李 斌. 城市公共交通线网优化的图论模型与算法[J]. 同济大学学报,1998,26(3):294-298.

(编辑:田新华)

Optimization of Troops Mobile Path Based on Graph Theory and Multi-objective Linear Programming

ZHANG Yao-yi[1], WANG Yin-long[1], LIU Fu-xian[1], DONG Hang-yuan[2]
(1. The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China; 2. The Science Research Department , Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: The purpose of this paper is to study the optimization of troops mobile path according to the two constraints of best time and most survival probability, which is put forward as a multi-objective linear programming problem. First, models of shortest path problem and Dijkstra algorithm are expounded, and then the objective of most survival probability is transformed into the shortest path problem. After that a multi-objective linear programming model is established. And the process pf operation in establishing the model by using STEM algorithm is described. Finally, the model and the algorithm are verified in usability through an example.

Key words: optimization of troops mobile path; graph theory; multi-objective linear programming