第6卷第6期　　空军工程大学学报(自然科学版)　　Vol.6 No.6
2005年12月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Dec.2005

一种真距离空间中成立的GM(1,1)模型

林　益

(国际一般系统研究所，美国 格罗夫市　16127)

摘　要:在将传统的微积分推广到离散时间序列的基础上,建立了一个新的GM(1,1)模型。最后,提出了两个急待解决的问题。

关键词:时间序列;微积分;指数定律;回归方程

中图分类号: TP18　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2005)06-0072-05

在灰系统的理论及应用中,GM(1,1)模型发挥了极为重要的作用。由于该模型所占的举足轻重的地位,有必要认真研究此模型的其它可能的推广形式。这样的研究为增进及加强已有的GM(1,1)模型的功能将会起到积极的作用。

1　问题的提出

给定一时间序列:

$$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \tag{1.1}$$

如果$x_i^{(0)} > 0, i = 1,2,\cdots,n$,此序列称为正序列。尽管长期以来,许多学者研究并引入了种种方法来预测$X^{(0)}$的未来值[1-2]$x_{n+1}^{(0)}, x_{n+2}^{(0)}, \cdots$,灰系统理论中的GM(1,1)模型似乎更具有实用的价值[3]。下面来看看GM(1,1)的理论基础。

为了使序列式(1.1)显示出较强的平滑度及递增的走向,引人累加算子D:

$$D(X^{(0)}) = X^{(1)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \tag{1.2}$$

其中

$$x_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{i} x_k^{(0)} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.3}$$

于是可以证明:对任何正序列$X^{(0)}$,反复使用算子D可以最终使序列:

$$D^r(X^{(0)}) = X^{(r)} = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \cdots, x_n^{(r)}) \tag{1.4}$$

平滑到任何一个事先给定的要求。严格说来,对任一$\varepsilon > 0$,存在M及$0 < N < n$,使得:如果$r \geq M, N < k \leq n$,则

$$\frac{x_k^{(r)}}{\sum_{i=1}^{k-1} x_i^{(r)}} < \varepsilon \tag{1.5}$$

基于此结果,下面的指数定律(Law of Exponentiality)得以证明:当$r \to \infty$,序列$D^r(X^{(0)})$的尾部将趋于纯指数型(homogeneous exponentiality)。换言之,当r足够大时,某一下述型式的子序列

$$(x_k^{(r)}, x_{k+1}^{(r)}, \cdots, x_n^{(r)}), 1 < k < n, \tag{1.6}$$

可以由形如

$$\hat{x}_k^{(r)} = b \cdot \exp(ak) \tag{1.7}$$

的指数函数来逼近及模拟。根据最小二乘法,可得下面所需的回归方程:

收稿日期:2004-01-18

作者简介:林　益(1959-),男,福建福州市人,教授,国际一般系统研究所所长,主要从事数学及一般系统理论及应用,数学建模,非线性分析及应用等研究.

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = \left[x_1^{(0)} - \frac{b}{a}\right]\exp(-ak) + \frac{b}{a} \tag{1.8}$$

其中 $\hat{x}_{k+1}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{D}^r(\boldsymbol{X}^{(0)}) = \boldsymbol{X}^{(1)}$ 中 $x_{k+1}^{(1)}$ 的模拟值,$[a \quad b] = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$,及

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -z_2^{(0)} & 1 \\ -z_3^{(0)} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z_n^{(0)} & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $z_k^{(0)} = 0.5x_k^{(1)} + 0.5x_{k-1}^{(1)}$。当在下述序列上应用反算子 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 时

$$\hat{x}_1^{(1)}, \hat{x}_2^{(1)}, \hat{x}_3^{(1)}, \cdots$$

即可得到 $X^{(0)}$ 的模拟序列及所需的预测值。为了达到更好的模拟效果,在本文中,使用真距离的平方和来取代最小二乘法以使回归方程(1.8) 得到改进。

2　离散时间序列上的微积分

为了得到后面的结果,让我们先看看如何将传统的微积分推广到离散的时间序列上。

假设 $X^{(0)}$ 如式(1.1) 中所定义,其中下标 $i = 1,2,\cdots,n$ 为数值 $x_i^{(0)}$ 被采集的时刻。为了研究极限概念,设 I 为一个时间单位的集合。如果

$$I = \{\cdots,年,月,日,小时,分,\cdots\}$$

则集合 I 称为一般时间单位集。对 i 层及 j 层上的时间单位 $I_i, I_j \in I$,如果 $I_i < I_j$,则称 i 层面上的时间比 j 层上的时间密。至此,极限概念可以推广如下

$$f(t) \to L(t),(当时间单位趋于极小时)$$

当且仅当所研究中的时间单位趋向于该研究项目中所允许的最小单元时,函数值 $f(t)$ 趋于 $L(t)$。例如,如果一般时间单位集 I 是某一研究课题所含的所有时间单位,则当时间单位趋于最小时,$f(t)$ 的极限等于当时间单位趋于零时 $f(t)$ 的极限。

基于上述极限概念的推广,积分概念可以如下推广到离散的时间序列上:假设 $y = f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的一个分段连续函数,则 $f(x)$ 的 Riemann 积分函数定义为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta_k \tag{2.1}$$

其中 $x \in [a,b]$,Δ 为闭区间 $[a,x]$ 的分划:

$$[a_0,a_1],[a_1,a_2],\cdots,[a_{n-1},a_n],(a_0 = a, a_n = x)$$

$t_k \in [a_k,b_k]$,$\Delta = a_{k+1} - a_k$,$\|\Delta\| = \max\{\Delta_k : k = 0,1,2,\cdots,n-1\}$。所以,当 $f(t)$ 是一时间 t 的函数时,函数 $f(t)$ 在时间区域 $[0,k]$ 上的积分可以定义为

$$F(x) = \lim_{\|\Delta\| \to \text{minimum}} \sum_{i=0}^{k-1} f(t_k)\Delta_k \tag{2.2}$$

其中 Δ,$\|\Delta\|$,t_k 及 Δ_k 均如上所定义。这个积分函数的实用性在于,如果原函数 $f(t)$ 是非连续的,其积分函数将具有更好的连续性。具体地说,如果一给定时间序列 $X^{(0)}$ 含有超远点(outliers),它的积分函数将不具有如此远的超远点。将积分算子多次运用于序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$,其结果将是一个非常光滑的序列。由于序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的最小时间单元是 1,式(2.2) 表示

$$x_k^{(1)} = \sum_{i=0}^{k-1} x_i^{(0)} \tag{2.3}$$

即:时间序列 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})$ 为原序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的积分。称序列算子 $D:\boldsymbol{X}^{(0)} \to \boldsymbol{X}^{(1)}$ 为累加算子。不难看到:

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^{(0)} \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 可以看做下面的三角阵:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

下面看如果推广导函数的概念。对一固定的自然数 r,有 $X^{(r)} = D^r(X^{(0)}) = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \cdots, x_n^{(r)})$。对于时间序列 $X^{(r)}$,其导函数可以定义如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_{(k)}^{(r)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_k^{(r)} - x_{k-1}^{(r)}}{\text{time unit}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^{(r-1)} - \sum_{i=1}^{k-1} x_i^{(r-1)}}{1} = x_k^{(r-1)} \tag{2.5}$$

就是说,序列 $X^{(r)}$ 对时间的导函数等于 $X^{(r-1)}$。由此,任一常微分方程

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots y', y) = 0$$

均可以推广到离散的时间序列 $X^{(0)}$:

$$f(x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \cdots, x_k^{(n-1)}, x_k^{(n)}) = 0 \tag{2.6}$$

3 主要结果

假设方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \alpha y = \beta \tag{3.1}$$

的一个指数解被用来模拟式(1.2)中的序列

$$(1, x_1^{(1)}), (2, x_2^{(1)}), \cdots, (n, x_n^{(1)}) \tag{3.2}$$

其中 α, β 为待定系数。假设点 (x_k, y_k) 为特殊解的曲线上这样一点,它使 (x_k, y_k) 与 $(k, x_k^{(1)})$ 间的距离等于该曲线与点 $(k, x_k^{(1)})$ 间的距离,$k = 1, 2, \cdots, n$。

求平方和

$$s^2 = \sum_{k=1}^{n} [(x_k - k)^2 + (y_k - x_k^{(1)})^2] = \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k^{(1)})^2 \left[\left(\frac{x_k - k}{y_k - x_k^{(1)}} \right)^2 + 1 \right] \tag{3.3}$$

由于点 (x_k, y_k) 及 $(k, x_k^{(1)})$ 间的距离与特殊曲线到点 $(k, x_k^{(1)})$ 间的距离相等,则

$$\frac{y_k - x_k^{(1)}}{x_k - k} = -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}} \tag{3.4}$$

这是因为斜率 $(y_k - x_k^{(1)})/(x_k - k)$ 与 (x_k, y_k) 点外的切线垂直。

由于假设方程(3.1)的一个解可以很好地模拟式(3.2),根据式(2.5),有

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\mathrm{d}x_k^{(1)}}{\mathrm{d}t} = x_k^{(0)}, k = 1, 2, \cdots, n \tag{3.5}$$

将式(3.5)代入式(3.3)得到

$$s^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k^{(1)})^2 [(x_k^{(0)})^2 + 1] \tag{3.6}$$

因为 $dy_k/dx_k + \alpha y_k = \beta$,式(3.5)隐含

$$y_k = \frac{\beta - \mathrm{d}y_k/\mathrm{d}x}{\alpha} = \frac{\beta - x_k^{(0)}}{\alpha} \tag{3.7}$$

将式(3.7)代入式(3.6)得

$$s^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\beta - x_k^{(0)}}{\alpha} - x_k^{(1)} \right)^2 [(x_k^{(0)})^2 + 1] \tag{3.8}$$

现在,求系数 α 和 β 的估计值 a 和 b 使式(3.8)中的 s^2 达到其最小值。对 s^2 的 α 和 β 分别求偏导得

$$\begin{cases} \frac{\partial s^2}{\partial \alpha} = \frac{2}{\alpha^3} \sum_{k=1}^{n} (x_k^{(0)} - \beta) [(x_k^{(0)})^2 + 1] [\beta - x_k^{(0)} - \alpha x_k^{(1)}] \\ \frac{\partial s^2}{\partial \beta} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{n} [(x_k^{(0)})^2 + 1] [\beta - x_k^{(0)} - \alpha x_k^{(1)}] \end{cases} \tag{3.9}$$

假设当 $\alpha = a, \beta = b$ 时,式(3.8) 中的 s^2 值达到最小值,则 $\alpha = a, \beta = b$ 满足下列方程组

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} (x_k^{(0)} - \beta)[(x_k^{(0)})^2 + 1][\beta - x_k^{(0)} - \alpha x_k^{(1)}] = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} [(x_k^{(0)})^2 + 1][\beta - x_k^{(0)} - \alpha x_k^{(1)}] = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

将此方程组中的第一个方程用于第二个方程得

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)} [(x_k^{(0)})^2 + 1][\beta - x_k^{(0)} - \alpha x_k^{(1)}] = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} [(x_k^{(0)})^2 + 1][\beta - x_k^{(0)} - \alpha x_k^{(1)}] = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

求解式(3.11) 得

$$\alpha = \frac{\sum_{j,k=1}^{n} x_j^{(0)} [(x_k^{(0)})^2 + 1][(x_j^{(0)})^2 + 1][x_k^{(0)} - x_j^{(0)}]}{\sum_{j,k=1}^{n} x_k^{(0)} [(x_k^{(0)})^2 + 1][(x_j^{(0)})^2 + 1][x_k^{(1)} - x_j^{(1)}]} \tag{3.12}$$

$$\beta = \frac{\sum_{j,k=1}^{n} x_k^{(0)} x_j^{(1)} [(x_k^{(0)})^2 + 1][(x_j^{(0)})^2 + 1][x_j^{(0)} - x_k^{(0)}]}{\sum_{j,k=1}^{n} x_k^{(0)} [(x_k^{(0)})^2 + 1][(x_j^{(0)})^2 + 1][x_k^{(1)} - x_j^{(1)}]} \tag{3.13}$$

对 $i = 1,2,\cdots,n$,定义

$${}_{i}^{(0)}\boldsymbol{A} = [1 \quad x_i^{(0)}]_{1\times 2}, \quad {}^{(r,j)}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} j & j & \cdots & j \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \cdots & x_n^{(r)} \end{bmatrix}_{2\times n}$$

$${}^{(0)}\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}] = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^{(0)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$${}^{(0)}\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[{}_{1}^{(0)}A, {}_{2}^{(0)}A, \cdots, {}_{n}^{(0)}A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2^{(0)} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n^{(0)} \end{bmatrix}_{n\times 2n}$$

$$\boldsymbol{B} = [{}_{1}^{(0)}A, {}_{2}^{(0)}A, \cdots, {}_{n}^{(0)}A]_{1\times 2n}^{\mathrm{T}} = [1 \quad x_1^{(0)} \quad 1 \quad x_2^{(0)} \quad \cdots \quad 1 \quad x_n^{(0)}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} {}_{1}^{(0)}A/x_1^{(0)} & {}_{2}^{(0)}A/x_2^{(0)} & \cdots & {}_{n}^{(0)}A/x_n^{(0)} \\ & & B & \end{bmatrix}_{2\times 2n}^{\mathrm{T}}$$

定理　假设时间序列 $X^{(0)}$ 为非负。如果 $\hat{\boldsymbol{a}} = [a \quad b]^{\mathrm{T}}$ 是参数$[\alpha \quad \beta]^{\mathrm{T}}$ 的真距离最小平方和的估计值,使得方程(3.1) 的某一解很好的模拟序列 $X^{(0)}$,则 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 满足

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{{}^{(1,1)}\boldsymbol{A}^{(0)}X^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}{}^{(0,1)}\boldsymbol{A}^{(0)}X^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}{\det({}^{(1,1)}\boldsymbol{A}^{(0)}X^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})} \tag{3.14}$$

证明　首先,算式(3.14) 的分母

$$\det({}^{(1,1)}\boldsymbol{A}^{(0)}X^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) = \det\begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \\ x_1^{(0)}x_1^{(1)} & x_2^{(0)}x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(0)}x_n^{(1)} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} + 1/x_1^{(0)} & (x_1^{(0)})^2 + 1 \\ x_2^{(0)} + 1/x_2^{(0)} & (x_2^{(0)})^2 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{(0)} + 1/x_n^{(0)} & (x_n^{(0)})^2 + 1 \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}[(x_k^{(0)})^2+1] & \sum_{k=1}^{n}x_k^{(0)}[(x_k^{(0)})^2+1] \\ \sum_{k=1}^{n}x_k^{(0)}[(x_k^{(0)})^2+1] & \sum_{k=1}^{n}x_k^{(0)}x_k^{(1)}[(x_k^{(0)})^2+1] \end{bmatrix}=$$

$$\sum_{j,k=1}^{n}x_k^{(0)}[(x_k^{(0)})^2+1][(x_j^{(0)})^2+1][x_k^{(1)}-x_j^{(1)}] \tag{3.15}$$

算式(3.14)的分子

$$^{(1,1)}A^{(0)}X^{(0)}AC\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \\ x_1^{(0)}x_1^{(1)} & x_2^{(0)}x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(0)}x_n^{(1)}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} (x_1^{(0)})^2+1 & -[x_1^{(0)}+1/x_1^{(1)}] \\ (x_2^{(0)})^2+1 & -[x_2^{(0)}+1/x_2^{(1)}] \\ \vdots & \vdots \\ (x_n^{(0)})^2+1 & -[x_n^{(0)}+1/x_2^{(0)}] \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}x_k^{(0)}[(x_k^{(0)})^2+1] & -\sum_{k=1}^{n}[(x_k^{(0)})^2+1] \\ \sum_{k=1}^{n}x_k^{(0)}x_k^{(1)}[(x_k^{(0)})^2+1] & -\sum_{k=1}^{n}x_k^{(1)}[(x_k^{(0)})^2+1] \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$^{(0,1)}A^{(0)}X^{(0)}AB=\begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \\ (x_1^{(0)})^2 & (x_2^{(0)})^2 & \cdots & (x_n^{(0)})^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (x_1^{(0)})^2+1 \\ (x_2^{(0)})^2+1 \\ \vdots \quad \vdots \\ (x_n^{(0)})^2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n}x_k^{(0)}[(x_k^{(0)})^2+1] \\ \sum_{k=1}^{n}(x_k^{(0)})^2[(x_k^{(0)})^2+1] \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

将式(3.15),(3.16)和式(3.17)放在一起并与式(3.12)及式(3.13)比较即得所需结果。证毕。

4 待解问题

尽管从理论讲,式(3.14)的结果将提供比式(1.8)的结果更为理想的模拟效果。但是式(3.14)看上去过于复杂,有待精简。同时,我们必须要用实际数据来检验,看加强的模拟效果是否会使所得的预测值更加具有不稳定性。

参考文献:

[1] Bowerman B L,O'Connell R T. Time Series and Forecasting:An Applied Approach[M]. North Scituate,Massachusetts:Duxbury Press,1979.

[2] Kendall M,Ord J K. Time Series. 3rd Edition[M]. New York:Oxford University Press,1990.

[3] Lin Y,Liu S F. Law of Exponentiality and Exponential Curve Fitting[J]. Systems Analysis Modelling Simulation,2000,38:621-636.

(编辑:田新华)

A GM (1,1) Model in the True Distance Space

LIN Yi

(Intermatopmal Institute for General Systems Studies, Inc. Grove City,16127, USA)

Abstract:On the basis of generalizing the traditional calculus to discrete time series, a new GM (1,1) model is established. In the end, two open problems, which are in desperate need for solution, are posted.

Key words: time series; calculus, law of exponents; regression equation