

## 独立分量与因子旋转关系分析

王刚<sup>1,2</sup>, 徐耀华<sup>1</sup>, 胡德文<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学电讯工程学院, 陕西西安 710077; 2. 国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 解析独立分量分析和因子分析的基本原理, 指出独立分量分析的本质是因子旋转, 从理论上证实了 Varimax 和 Onhomax 等因子旋转与基于峭度的独立分量估计目标函数条件等价。考虑多种类型源信号的情况, 提出了基于 Varimax 的独立分量估计方法。实验表明, 在混合矩阵满足稀疏条件下该方法简单有效。

关键词: 独立分量分析; 因子分析; 因子旋转; 峭度

中图分类号: PT183 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2005)05-0036-05

独立分量分析(ICA)是近年来兴起的一种基于高阶统计的信号处理和分析方法, 由于具有较强的特征表示和盲辨识能力, 目前已经广泛应用生物工程、遥感遥测、医学成像、数据挖掘等领域<sup>[1-4]</sup>。作为一种新的线性表示方法, ICA 则重于信号的高阶统计信息, 不同于传统的二阶统计方法。同时又和主成分分析(PCA)、投影追踪和因子分析等经典方法存在内在的联系, 如, 在不考虑噪声项和对潜在分量的非高斯约束条件时, ICA 可以看成投影追踪; 从目标函数的构造来看, ICA 可以理解为非线性 PCA<sup>[2-3]</sup>。

因子旋转是实现因子分析的关键和重要步骤, 根据参数选择的不同, 有 Quartimax 和 Varimax 等多种实现方法<sup>[5]</sup>。因子分析和因子旋转通常定义为二阶统计方法, 其基本模型中包含潜在因子的混合项和噪声等, 通常要求潜在因子满足高斯分布。不考虑对潜在因子的约束, 因子分析模型和噪声 ICA 模型完全相同, 在估计过程中都需要考虑去偏问题。不考虑噪声项, 因子分析模型就退化为基本 ICA 模型。因此, 在论述因子分析、因子旋转与 ICA 的关系时, 通常将 ICA 可以看成非高斯的因子分析方法<sup>[2]</sup>。文献[6]、[7]对因子旋转和 ICA 的关系作了初步的探索, 其中统计软件 SAS 和 FastICA 对超高斯源信号的盲辨识给出了非常接近的结果。在此基础上, 以下首先从线性变换的角度解析 ICA 和因子分析的基本原理, 指出 ICA 的实质就是因子旋转, 并从传统因子分析方法中导出因子旋转和基于峭度估计的目标函数的条件等价。考虑多类源信号混合的情况, 提出了基于 Varimax 的 ICA 估计方法。

## 1 基本原理比较

### 1.1 ICA 中的旋转

ICA 源于盲信号分离, 其基本(线性)模型<sup>[2]</sup>为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{s}$  分别为  $M$  维的观测矢量、 $N$  维的信号矢量,  $\mathbf{A}$  是  $M \times N$  的混合矩阵( $M \geq N$ )。要求满足统计独立和非高斯约束(至多只含一个高斯信号)。ICA 的目的是在仅知道观测矢量  $\mathbf{x}$  的情况下寻找分离矩阵  $\mathbf{W}$ , 实现混合矩阵  $\mathbf{A}$  和信号矢量  $\mathbf{s}$  的辨识。

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (2)$$

其中  $\hat{\mathbf{s}}$  是  $\mathbf{s}$  的估计。考虑源信号为零均值单位方差, 理想情况下满足  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}$  为单位置换阵)。估计方法

收稿日期: 2005-03-18

基金项目: 国家自然科学基金(60234030)、国家杰出青年科学基金(60225015)、高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划基金等资助项目

作者简介: 王刚(1976-), 男, 湖北武汉人, 讲师, 博士生, 主要从事神经网络、模式识别等技术研究。



主要有最大非高斯、最小互信息和最大似然函数等,当前流行的快速不动点算法(FastICA)就是基于负熵的独立性判决准则和分离方法<sup>[3-4]</sup>。

解析这些估计方法可以看出,估计过程通常可以分解为3个步骤:观测数据的聚中( $x \leftarrow x - \bar{x}$ )、白化和旋转<sup>[4,6]</sup>。考虑二维平面空间系统,设两个非高斯独立源  $s_1$  和  $s_2$  (如均匀分布),两者的联合概率分布区域如图1所示,图2是  $s_1$  和  $s_2$  的线性混合  $x_1$  和  $x_2$  的联合概率分布区域。从中可以看到,图1的联合概率分布为矩形,两边分别与轴  $s_1$  和轴  $s_2$  平行,联合概率分布  $p(s)$  可以分解为  $p(s) = p(s_1)p(s_2)$ 。而图2中,联合概率分布区域为一般的平行四边形,  $p(x)$  无法直接分解  $p(x_1)$  和  $p(x_2)$  乘积。

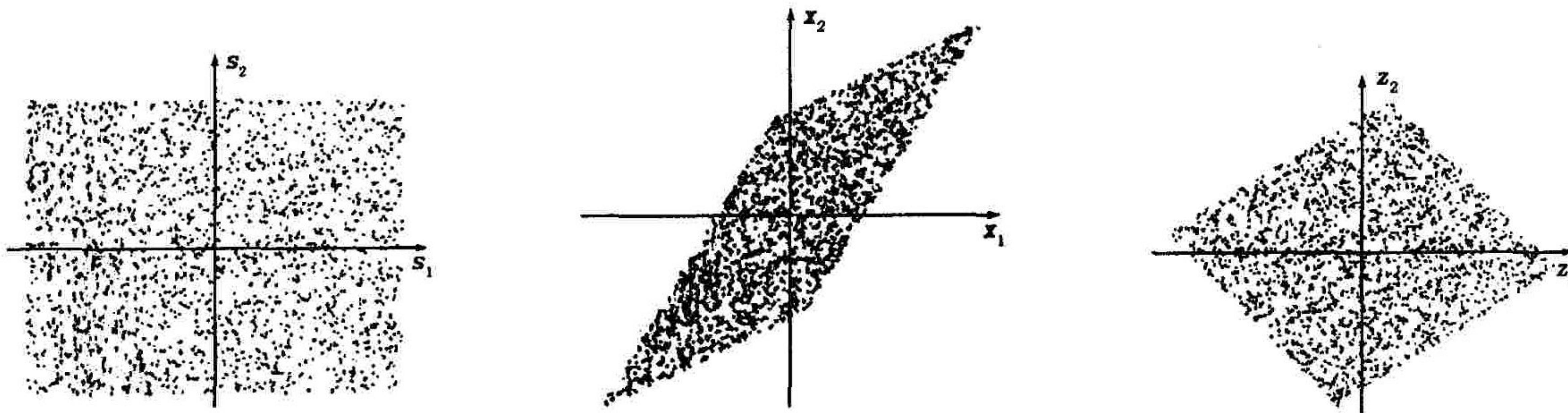


图1 源信号的联合分布域

图2 线性混合信号的联合分布域

图3 白化数据的联合分布域

运用ICA估计源信号的过程,实质就是寻求从图1到图2变换的逆变换。白化在去相关基础上要求数据满足单位方差约束,白化数据  $z$  可以通过零均值数据  $x$  右乘某个白化矩阵  $V$  得到

$$z = Vx \tag{3}$$

通常  $V$  可以表述为  $V = ED^{-1/2}E^T$ ,  $E$  和  $D$  分别对应  $E\{xx^T\}$  的特征向量矩阵和特征值对角阵。图3中矩形为白化数据的联合概率分布,由于矩形的边和坐标轴不平行,联合概率密度函数仍然不能够直接分解;而且由于白化矩阵和对应白化数据  $z$  也不唯一。通过某种线性变换(旋转),第三步旋转解决了联合概率分布从图3向图1的转变。而且在满足单位方差的条件下,这种变换的唯一性和旋转方向的不确定性(顺方向和逆方向)表现为ICA估计的唯一性和分量顺序的不确定性。

### 1.2 因子分析和因子旋转

因子分析的模型为

$$x = \mu + As + u \tag{4}$$

其中  $x$  为  $M$  维观测向量,  $s$  为  $N$  维潜在因子 ( $M \times N$ ),  $u$  为误差因子向量(噪声项),  $\mu$  为均值向量,通常假设  $s$  和  $u$  均为高斯信号。和PCA相似,因子分析也是一种数据降维的重要方法。因子分析主要有两种估计方法,一种是和PCA相似的主因子方法,二是最大似然估计方法。因子分析的本质是寻找某种旋转因子,从而使得对应的基最感兴趣、解释性最强,其经典的准则是实现最节省表示<sup>[2,5]</sup>。

### 1.3 分析

从模型的定义来看式(1)、(4)是非常相似的两种线性表示方法。当  $u = 0$   $\mu = 0$ 、 $s$  为非高斯信号时,因子分析和ICA的模型完全相同。从估计的原则看,因子分析强调最节省表示,意味着混合矩阵  $A$  中只包含有极少的非零元素,即混合矩阵为稀疏矩阵,Varimax和Orthomax等因子旋转是这一准则的具体实现,其原理和当前ICA理论研究中的稀疏编码、稀疏表示非常相似<sup>[2]</sup>。从ICA在生物医学中的应用机理分析,观测数据中同一时刻起作用的通常只是少数的潜在内源信号,绝大多数内源处在零贡献状态(起主导作用的是极少数因子)。这时ICA的估计准则(如最大非高斯准则)本质上是分析内源信号的混合方法并得到内源信号<sup>[4]</sup>,也就是寻找稀疏表示或者某种因子旋转。这种旋转仅依靠PCA、白化处理等二阶统计方法是无法解决的,也正是ICA方法的本质和关键所在。

## 2 目标函数分析

设  $\phi(m)$  为  $m$  维正交矩阵的集,对于任何  $P \in \phi(m)$ ,  $B = (b_{ij}) = AP$ , Varimax旋转求解旋转矩阵  $P$  的目标函数  $D_{ST}$  为



$$D_{ST} = \max_{P \in \phi(m)} \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^p (b_{ir}^2 - \bar{b}_r^2)^2 \quad (5)$$

其中,  $\bar{b}_r^2$  为  $B$  矩阵列元素均值的平方。Crawford 等提出的 Orthomax 准则是对 Varimax 旋转的推广<sup>[5]</sup>

$$D_{ST} = \max_{P \in \phi(m)} \left[ \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^p (b_{ir}^4 - \frac{\omega}{p} \sum_{r=1}^m (\sum_{i=1}^p b_{ir}^2)^2) \right] \quad (6)$$

根据  $\omega$  选择的不同, Orthomax 存在 Orthomax( $\omega = 0$ ), Bipuatimax( $\omega = 1/2$ ) 等一系列的旋转准则。当  $\omega = 1$  时, Orthomax 退化为 Varimax 准则。

分析式(5)、(6)可以看出, 因子旋转的准则本质上都是  $b_{ir}^2$  的方差形式。当绝大多数  $b_{ir}^2$  接近 0, 极少数非常大时, Varimax 和 Orthomax 准则成立<sup>[7]</sup>。同时可以看出, 当  $b_{ir}^2$  的方差和  $b_{ir}^2$  的累积量非常相似。不妨先令  $\omega = 3$ , 则 Orthomax 函数表示为

$$D_{ST} = \max_{P \in \phi(m)} P \sum_{r=1}^m \left[ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p b_{ir}^4 - 3 \left( \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p b_{ir}^2 \right)^2 \right] \quad (7)$$

剔除求和符号前的因子  $p$ , 式(7)中的对  $r$  的求和项实际上等价于矩阵  $B$  列元素的 4 阶累计量之和

$$\left[ \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^p b_{ir}^4 - \frac{3}{p} \sum_{r=1}^m \left( \sum_{i=1}^p b_{ir}^2 \right)^2 \right] \Leftrightarrow \sum_{r=1}^m \text{kurt}(b_r) \quad (8)$$

从统计学的观点看,  $\text{kurt}(b_r)$  本质上是非高斯估计的度量标准。如基于负熵的 FastICA 算法的推理中, 就直接采用  $E[G(\mathbf{w}^T \mathbf{z})]$  作为优化目标函数, 在  $G(x) = x^4$  时, 对应基于峭度的目标函数<sup>[3]</sup>。在 ICA 理论的早期研究中, Comon 就提出了形如

$$D_{ST} = \sum_{r=1}^m (\text{kurt}(b_r))^2 \quad (9)$$

的目标函数<sup>[1]</sup>, 和(8)非常的相似。

考虑源信号的性质可以看出: ①当源信号都为超高斯分布时, 可以直接通过式(8)的最大化来实现独立分量(潜在因子)的求解; ②当源信号都为次高斯分布时, 可以直接通过式(8)的最小化来实现独立分量(潜在因子)的求解; ③源信号中既包含超高斯信号又包含次高斯信号时, 式(8)就不再适合。

当式(6)中  $\omega \neq 3$  时, 考虑估计过程中通常先要对观测数据进行去均值和白化处理, 矩阵  $B$  中列元素满足  $\sum_{i=1}^p b_{ir}^2 = 1$ , 同样可以得到式(7)。

### 3 基于 Varimax 的新方法

对于经过标准化预处理的观测数据, 对式(6)式加以改进, 可以采用以下目标函数

$$D_{ST} = \max_{P \in \phi(m)} \left| \left[ \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^p b_{ir}^4 - \frac{\omega}{p} \sum_{r=1}^m \left( \sum_{i=1}^p b_{ir}^2 \right)^2 \right] \right| \quad (10)$$

显然式(10)中的目标函数和式(9)等价, 不必考虑源信号是超高斯还是次高斯, 或者是两者的混合。取  $\omega = 1$ , 直接得到 Varimax 准则。相对于基于概率密度函数估计的一些方法如负熵、最大似然估计而言, 基于因子分析的目标函数, 尤其是式(5)在理解和表述上要简单的多<sup>[3,4,8]</sup>。总结以上分析, 可以得到基于 Varimax 的 ICA 估计方法, 步骤归纳如下:

- 1) 观测数据的聚中 ( $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ );
- 2) 白化处理  $\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ , 其中白化矩阵可选择  $\mathbf{V} = \mathbf{E}\mathbf{D}^{(-1/2)}\mathbf{E}^T$ ;
- 3) 初始化分离矩阵  $\mathbf{P}$  为单位阵;
- 4) 按照式(5)定义的目标函数优化。

需要说明的是步骤 4 中目标函数的优化同样可以采用最速梯度下降、自然梯度、牛顿近似迭代等多种优化方法。实验中 Varimax 旋转采用的是一种局部调整的优化方法<sup>[9]</sup>, 同时鉴于因子分析中混合矩阵为稀疏矩阵的约束, 分离矩阵初始化为单位阵。

### 4 实验和分析

选择日本 Riken 脑科学研究院高级脑信号处理实验室<sup>[10]</sup>提供的部分标准实验数据检验新算法的性能。



实验1 分析算法对混合类型源信号的估计性能,实验2 分析对多维超高斯源信号的估计性能。

实验1 选择文献[10]中 Speech4. mat 的一组(4个)语音信号为独立源,对应峭度分别为 5.068 8、-0.556 7、3.897 3 和 5.577。混合矩阵  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$ , 估计信号和源信号的相似性比较见表1。

实验2 选择文献[10]中 ACvsparse10. mat 的10个稀疏源信号(多维超高斯信号)。混合矩阵  $Q$  为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表1 估计信号与源信号的相关性比较

估计信号	源信号			
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$s_1$	0.967 8	0.010 1	0.077	0.204 8
$s_2$	0.037 5	0.999 0	0.046 8	0.235 7
$s_3$	0.182 3	0.037 8	0.988 8	0.145 7
$s_4$	0.183 1	0.046 5	0.065 0	0.942 6

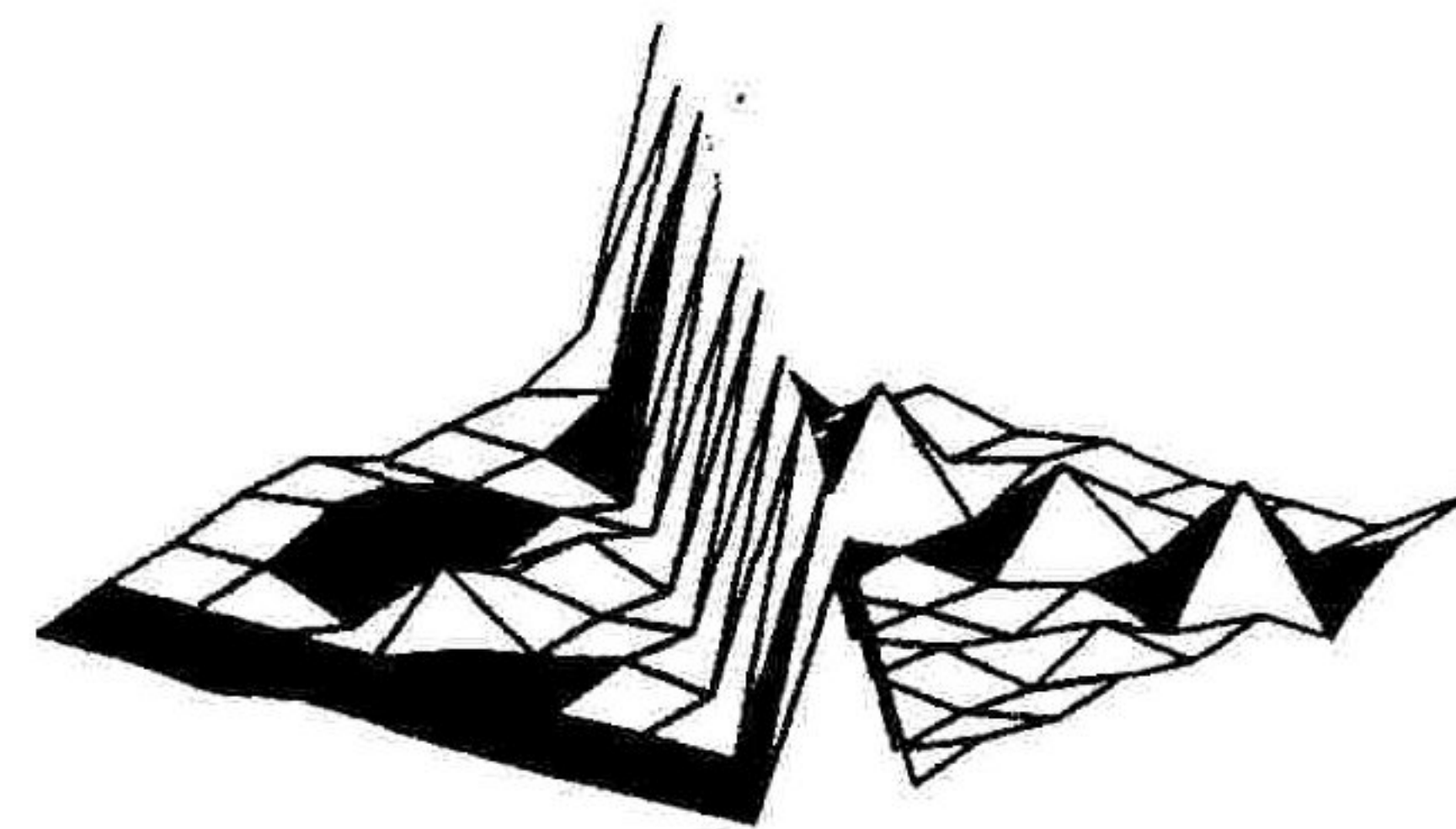


图4 估计信号与源信号的相关图

图4 中的曲面图给出了估计信号和源信号的相关性比较。对源信号的估计率(对应相关系数矩阵的对角元素)依次为 0.886 6、0.896 4、0.966 5、0.939 1、0.964 3、0.896 4、0.919 0、0.994 7、0.925 8、0.933 3, 算术平均率为 0.932。

实验结果表明:①基于 Varimax 的估计方法简单有效。在实验1中,新方法对4组源信号的估计相似性均值为 0.975 3,尤其是对源信号2的估计相似度达到 0.999 0;②新方法虽然不涉及到密度函数近似等问题,对于超高斯分布和次高斯分布混合信号同样适用;③新方法的估计效果和源信号自身性质直接有关,尤其是超高斯分布,和基于峭度的最大非高斯估计一样极易受极少数外点和大值点的影响,如实验2中的估计效果就远差于实验1<sup>[2-3]</sup>。同时也发现,基于 Varimax 的估计方法要求混合矩阵为稀疏矩阵或者近似稀疏,随着混合矩阵中非零元素的增多,估计的效果变差,多个源信号对同一观测信号贡献相当时估计尤其困难。

作为比较,我们还对相同的实验采用 FastICA 方法进行估计。比较两种方法可以看出:FastICA 的估计准确率一般都比基于 Varimax 的估计方法高,但是所用的时间也长得多,甚至出现最大迭代步长内算法不收敛,而新方法却不存在这种现象。从实际应用来看,基于 Varimax 的估计方法完全可以作为一种粗略的 ICA 估计方法,尤其是混合方法相对稀疏,对估计的精度要求不太高而对估计的效率要求高的情况,如在线语音增强。

## 5 结束语

独立分量分析和因子分析是线性表示的两种不同形式。分析独立分量分析和因子分析的基本原理,可以看出独立分量分析的本质是因子旋转,理论上 Varimax 和 Orthomax 等因子旋转与早期 Comon 提出的基于峭度的 ICA 估计目标函数条件等价。考虑源信号类型的不同,提出了基于 Varimax 的独立分量分析的估计方法,结合实验验证了该方法的简单有效性,并指出新方法的局限性和应用前景。



## 参考文献:

- [ 1 ] Comon P. Independent Component Analysis – a New Concept[J]. *Signal Processing*, 1994, 36(3): 287 – 314.
- [ 2 ] Hyvarinen A. Survey on Independent Component Analysis[J]. *Neural Computing Surveys*, 1999, 2: 94 – 128.
- [ 3 ] Hyvarinen A, Oja E. Independent Component Analysis: Algorithms and Applications[J]. *Neural Networks*, 2000, 13: 411 – 430.
- [ 4 ] Cichocki A, Amari S. Adaptive Blind Signal and Image Processing: Learning Algorithms and Applications[A]. Wiley, 2003.
- [ 5 ] Crawford C B, Ferguson G A. A General Rotation Criteria and Its Use in Orthogonal rotation[J]. *Psychometrika*, 1970, 35: 321 – 332.
- [ 6 ] Gang Wang, Dewen Hu. On Nonlinear Independent Component Analysis Using Self – Organizing Map[A]. the 5th Congress on Intelligence Control and Automation[C]. Hangzhou: WCICA2004, 2004.
- [ 7 ] Kano Y, Miyamoto Y, Shimizu S. Factor Rotation and Independent Component Analysis[A]. the 4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Source Separation[C]. Nara Japan: ICA2003, 2003.
- [ 8 ] Lee T W, Girolami M, Sejnowski T J. Independent Component Analysis Using an Extended Infomax Algorithm for Mixed Sub – Gaussian and Super – Gaussian sources[J]. *Neural Computation*, 1999, 11(2): 417 – 441.
- [ 9 ] Eeglab. Open Source Matlab Toolbox for Physiological Research[EB/OL]. <http://www.sccn.ucsd.edu/~scott/ica.html>
- [ 10 ] Cichocki A, Amari S, Siwek K, et al. ICALAB Toolboxes[EB/OL]. <http://www.bsp.brain.riken.jp/ICALAB>.

(编辑: 门向生)

Analysis of the Relationship between Independent Component  
and Factor Rotation

WANG Gang<sup>1,2</sup>, XU Yao-hua<sup>1</sup>, HU De-wen<sup>2</sup>

(1. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China; 2. College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The principles of Independent Component Analysis (ICA) and factor analysis are given, and that the essence of ICA is factor rotation is presented. The analyses show that conventional factor rotations such as Varimax and Orthomax are equivalent conditionally to the early kurtosis -based estimate method for ICA presented. A Varimax - based method for ICA is proposed in consideration of all non - Gaussian sources even mixed signals with sub - and super - Gaussian distributions are included. Experimental results show that the novel method is simple and efficient when the mixing matrix is sparse.

Key Words: independent component analysis (ICA); factor analysis; factor rotation; kurtosis

(上接第 35 页)

## Effects of Vacuum Levels on Carbon Nanotube -Field Emission Display

TIAN Chang - hui<sup>1,2</sup>, ZHU Chang - chun<sup>2</sup>, WANG Qi - kun<sup>2</sup>, LIU Xing - hui<sup>2</sup>, WANG Xiao - li<sup>2</sup>

(1. The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China; 2. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China)

Abstract: A mathematical and physical model of electron - gas collisions is constructed. The experimental observation and theoretical analysis demonstrate that light emissions of a carbon nanotube - field emission display (CNT - FED) at different vacuum levels are mainly caused by electron bombardment on the phosphor. Light emission of the phosphor, excited by ultraviolet (UV) light derived from gas discharge, is not found even if the vacuum level is very poor. If vacuum level is too poor, a large amount of gas ionization will reduce the electric potential difference between the cathode and anode, so electrons are not emitted. The numerical calculations for the mean frequency of electron - gas collision indicate that the product of gas pressure and distance between the electrodes (pd) is a better parameter to characterize the effect of vacuum level for FED than gas pressure only, and when the distance between the cathode and anode is increased, the vacuum level must be improved to obtain the same effect.

Key words: carbon nanotube; field emission; vacuum level; electron - gas collision frequency