

### 基于相位差分的 Kay 法 SNR 阈值分析及改进

杨宝强<sup>1</sup>, 刘苍毅<sup>2</sup>, 朱林户<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学训练部, 陕西西安 710051; 空军工程大学理学院, 陕西西安 710051)

摘要: 基于相位差分的 Kay 法在单个复正弦信号频率估计方面有良好的统计性能, 但在实际应用中存在明显的 SNR 阈值。本文分析讨论了 Kay 法的 SNR 阈值及形成的原因, 提出了几种有效降低 SNR 阈值的方法, 包括: 滤波器法、频率粗估计法、滤波器组法等。这些方法的优点在于降低 SNR 阈值的同时增加的计算量不大。计算机仿真验证了方法的有效性。

关键词: Kay 法; 相位差分; SNR 阈值

中图分类号: TN957.51 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2005)04-0034-03

高斯白噪声中的单个复正弦信号频率的估计由于在通讯、雷达、电子对抗中具有广泛的应用, 得到了大量的研究<sup>[1-5]</sup>。这些研究中由 S. A. Tretter<sup>[1]</sup> 提出并经 S. M. Kay<sup>[2]</sup> 修改的基于最小均方误差的相位差分方法的估计方差因为随信噪比的增加能有效逼近 Cramer Rao 界而受到足够的重视。但 Kay 的相位差分法存在明显的 SNR 阈值, 而且 SNR 阈值与被测频率大小有关, 且并不随参与估计的信号个数的增加而有所降低。针对这个问题 Fitz<sup>[3]</sup> 和 L&R<sup>[4]</sup> 利用接收信号的自相关系数提出了新的频率估计算法; S. Umesh 对分段数据进行 FFT<sup>[6]</sup>, 叠加幅度谱, 再进行相位差分, 这些算法都能有效降低 SNR 门限, 但运算量大大增加。

## 1 Kay 法及 SNR 阈值讨论

考虑复正弦信号加高斯白噪声, 其离散采样数据  $y(n) = Ae^{j(2\pi f_0 n + \theta)} + v(n)$ 。式中:  $A$  是幅度;  $f_0$  是频率;  $\theta$  是相位;  $v(n)$  是零均值方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声。对于高的信噪比  $\sigma^2/A^2 = 1$ , 有  $y(n) = ae^{j(2\pi f_0 n + \theta + u(n))} + v(n)$ 。其中  $u(n)$  是零均值, 方差为  $\sigma^2/2A^2$  的高斯白噪声。Kay 利用相位差分得到  $\Delta\phi(n) = \arg(y^*(n)y(n+1)) = \omega + u(n+1) - u(n)$ 。  $\omega = 2\pi f_0$ , 可以看出上式为一 MA 模型, 利用最小二乘方法, 得到  $\omega$  的无偏估计子为  $\sum_{n=0}^{N-2} h(n)\Delta\phi(n)$ 。其中  $h(n) = (3N/2(N^2 - 1))(2(n - (N/2 - 1)/N))^2$ 。

估计子的估计方差与 Cramer - Rao 界一致<sup>[2]</sup>。仿真实验表明 Kay 方法存在阈值。而且 SNR 阈值随被估计频率的大小不同而变化, 频率接近零时 ( $f_0 = 0.05, N = 16$ ), SNR 阈值在 7 dB 左右 (图 1), 越接近被测频率估计范围  $[-0.5, 0.5]$  两端, SNR 阈值越大 (见图 2)。  $N = 24$  时,  $f_0 = 0.3$ , SNR 阈值约为 11 dB (图 2),  $N = 24$  时,  $f_0 = 0.4$ , SNR 阈值约 16 dB。而且 SNR 阈值大小随参与估计的数据长度的增加没有明显的改善。

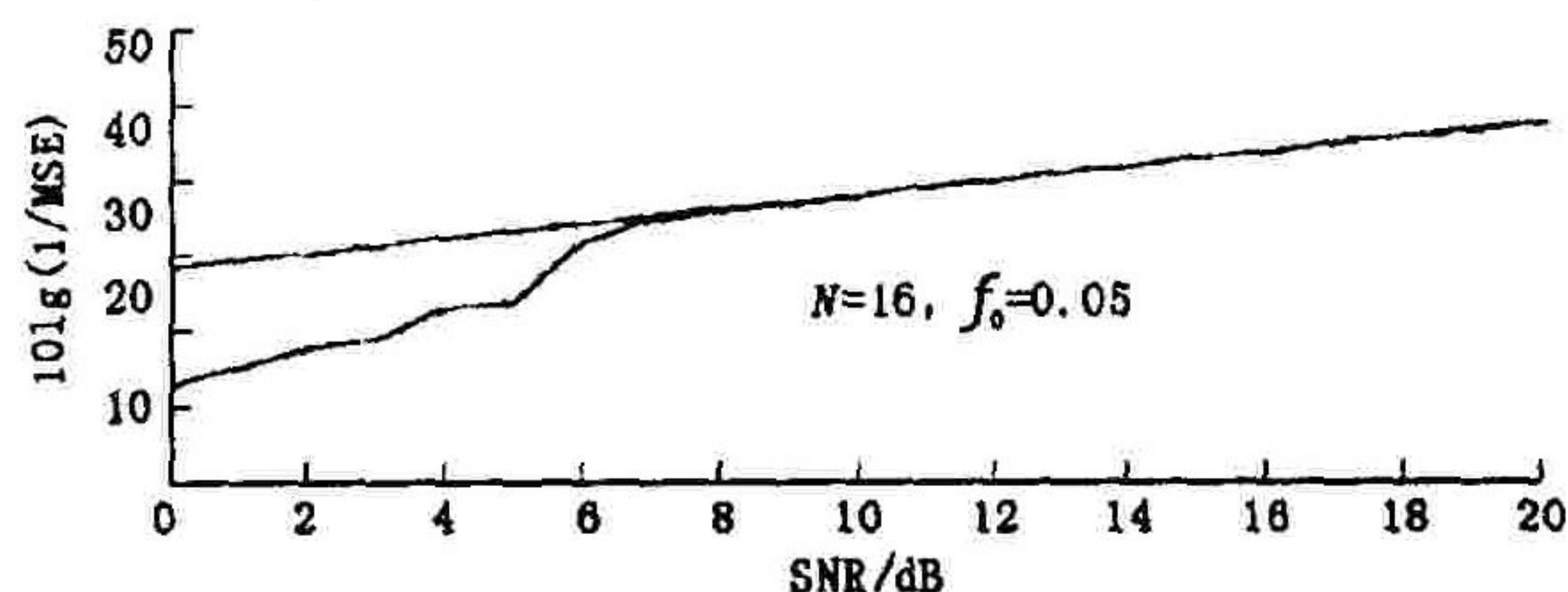


图 1  $f_0 = 0.05$  测频性能

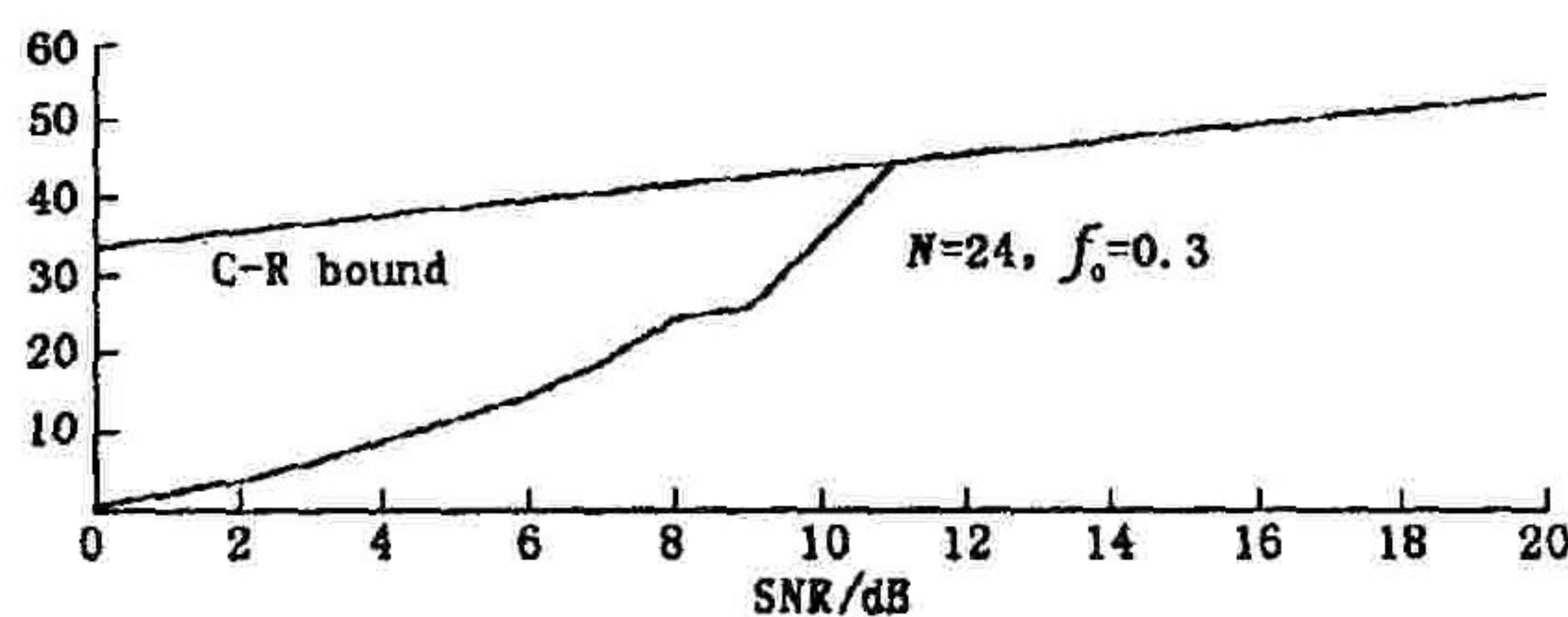


图 2  $f_0 = 0.3$  测频性能

收稿日期: 2004 - 11 - 16

作者简介: 杨宝强 (1972 -), 男, 河南潢川人, 博士生, 主要从事系统工程研究。



## 2 SNR 阈值分析

相位差分算子的相位折叠误差是导致存在 SNR 阈值的原因之一。这种影响与被估计的频率大小和参与估计的点数有关。Kay 差分算子实际上是  $\Delta\phi(n) = W_{\pm\pi}[\omega_0 + \Delta v_q/A]$ 。  $W_{\pm\pi}[x]$  表示把位于  $[-\pi, \pi]$  以外的  $x$  折叠成  $[-\pi, \pi]$  中的  $\hat{x}$ ,  $x = \hat{x} + 2\pi i$ 。当  $\omega_0$  接近于零或噪声很小时,基本上不需要进行相位折叠。而当  $\omega_0$  接近  $[-\pi, \pi]$  时,相位差分结果位于  $[-\pi, \pi]$  以外的概率就大大增加,需要相位折叠,从而就导致运算误差。因此被估计频率越接近  $[-\pi, \pi]$  两端,越需要更高的 SNR 信噪比阈值。另外如果参与估计的点数增加即差分运算增加,在某一点需要相位折叠的可能性也会增加,所以参与估计的点数增多对降低 SNR 阈值影响不大。图 3、图 4 说明了这些关系。

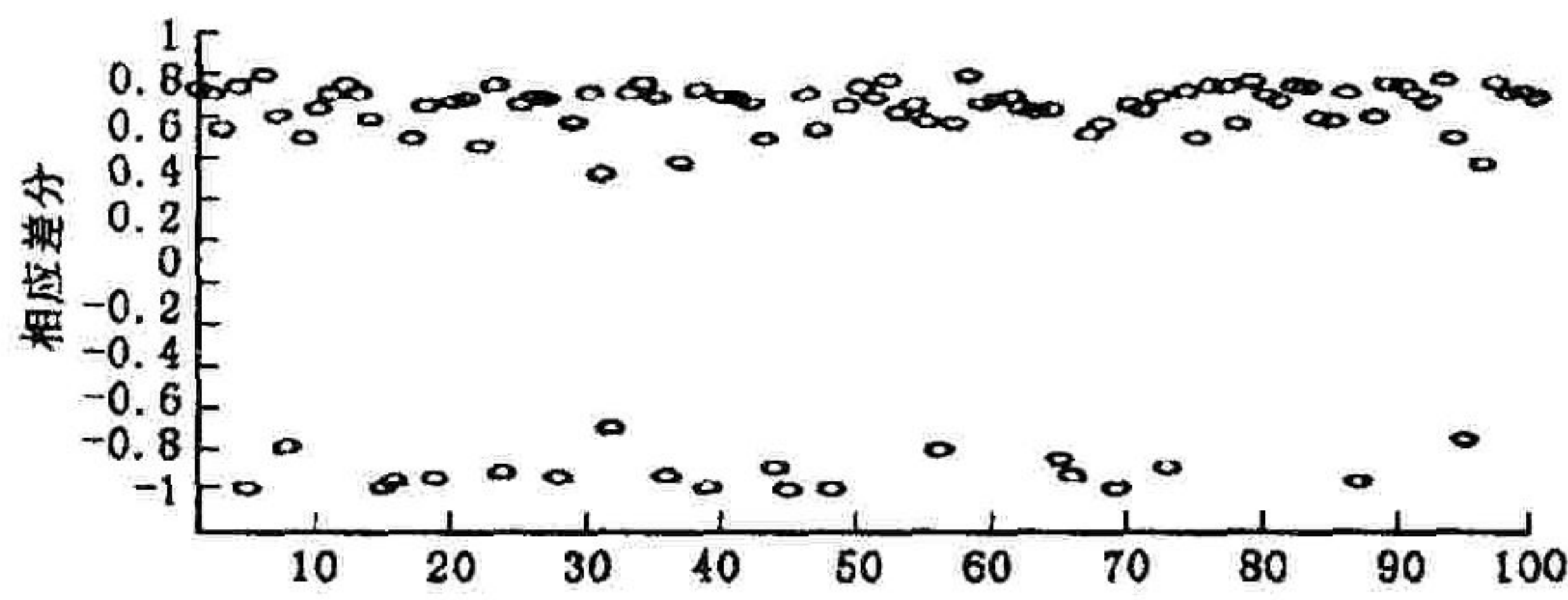


图3  $f_0 = 0.45, \text{SNR} = 10 \text{ dB}$  时的相位差分运算

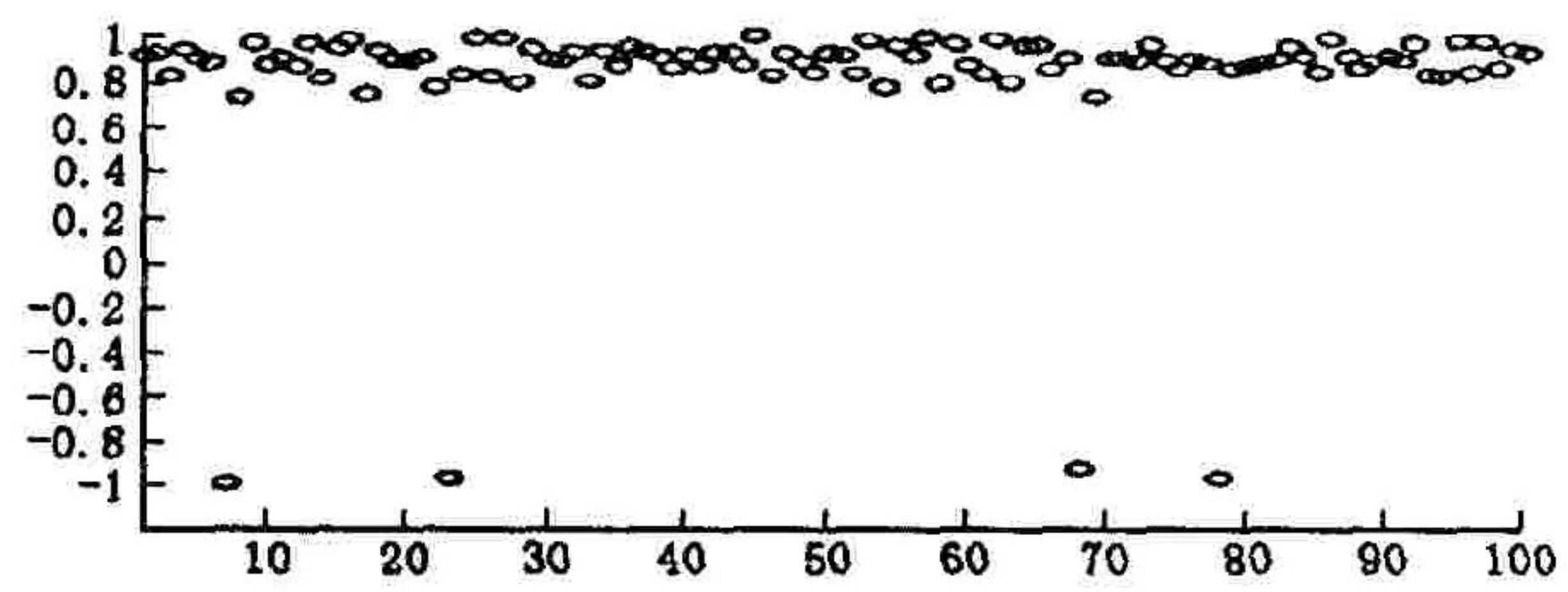


图4  $f_0 = 0.45, \text{SNR} = 15 \text{ dB}$  时的相位差分运算

造成 SNR 阈值的另外一个原因是高信噪比情况下,包络和相位的近似分布。对于  $y(n) = Ae^{j(2\pi f_0 n + \theta)} + v(n) = \bar{A}e^{j(\phi n)}$ ,  $\bar{A}, (\phi n)$  的联合概率密度函数为

$$P(\bar{A}, (\phi n); A, \omega_0, \theta) = \frac{A[1 + \frac{\bar{A}(n) - A}{A}]}{\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(\bar{A}(n) - A)^2}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{\frac{2A^2}{\sigma^2}[1 - \cos(\phi(n) - \omega_0 - \theta)]\right\} \left[1 + \frac{\bar{A}(n) - A}{A}\right]$$

满足  $A > 3\sigma/\sqrt{2}$  时有

$$P(\bar{A}, (\phi n); A, \omega_0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\bar{A}(n) - A)^2}{\sigma^2}\right\} \frac{A}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{A^2}{\sigma^2}(\phi(n) - \omega_0 - \theta)^2\right\}$$

信噪比为 6.5 dB 以上时  $\bar{A}\phi(n)$ , 可以近似为高斯分布,这时用最小二乘处理高斯分布问题,才能获得最优解。即使不考虑相位展开误差, Kay 方法要想达到 C-R 界,也存在约 6.5 dB 的 SNR 阈值。

## 3 降低 SNR 阈值

### 3.1 滤波器法

降低 Kay 法的 SNR 阈值,可以在用相位差分进行频率估计之前,用简单的 FIR 滤波器处理输入信号,提高信噪比,达到降低 SNR 阈值的目的。对  $y(n) = Ae^{j(2\pi f_0 n + \theta)} + v(n)$ ,  $v(n)$  是零均值方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声,信噪比为  $A^2/\sigma^2$ , 设  $\hat{y}(n) = (y(n) + y(n+1))/2, n = 0, 1, \dots, N-1$ 。则  $\hat{y}$  的信噪比原信号提高约 3 dB。可以得到相位差分为  $\Delta\phi(n) = \arg(\hat{y}(n)\hat{y}(n+1)) = \omega + [\hat{v}_q(n+2) - \hat{v}_q(n)]/A\cos(\omega_0/2)$ 。再利用最小二乘法可以得到与 Kay 法类似的频率估计子。  $\hat{\omega}_0 = 1^T C^{-1} \Delta\phi / 1^T C^{-1} 1$ 。

由于在进行相位差分频率估计前,信噪比提高约 3 dB,则 SNR 阈值也相应的降低 3 dB。值得注意的是由于相位差分项中有  $\cos(\omega_0/2)$  存在,当  $\omega_0$  在  $[-\pi/2, \pi/2]$  以外,相位差分项中的噪声项变得很大,使得被估计角频率范围被限定在  $[-\pi/2, \pi/2]$ 。更为一般的有  $\hat{y}(n) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^{K-1} y(n-m), n = K-1, \dots, N-1$ 。则有

$$\text{频率估计子 } \hat{\omega}_0 = \sum_{n=1}^{(N-K)/K} h(n) \sum_{m=1}^{K-1} \Delta\phi(Kn-m) \circ h(n) = \frac{n(6/K)(N/K-n)}{N/K[(N/K)^2-1]}$$

通过 K 阶滤波器,信号信噪比增加  $10\lg K$  dB, 阈值下降  $10\lg K$  dB,但频率估计范围变为  $[-\pi/K, \pi/K]$ 。图 5 给出了 Kay 法和  $K = 2$  时在  $N = 16, f_0 = 0.05$  时的测频性能, Kay 法的 SNR 阈值约为 8 dB, 滤波器法的 SNR 阈值约为 5.5 dB。



### 3.2 频率粗估计降低阈值

在对 SNR 阈值进行分析有被测频率越接近可测频段两端, SNR 阈值越高。那么可以先用较少的数据点对被测频率进行粗估计, 得到  $\hat{\omega}_0$ 。然后再用相位差分方法对  $y(n)e^{-j\hat{\omega}_0(n)}$  进行估计得到精确的修正量  $\Delta\hat{\omega}_0$ , 从而得到被测频率  $\hat{\omega}_0 + \Delta\hat{\omega}_0$ 。因为频率被转换到接近零, 所以 SNR 阈值可以得到降低。图 6 给出了在  $N = 24$ ,  $f_0 = 0.4$ , 当粗测频率为  $\hat{f}_0 = 0.3$  时, 再进行相位差分测频的性能图。与前面的 Kay 法相比, 同等条件下对较高频率估计, 进行频率粗估计 SNR 阈值降低约 7dB。

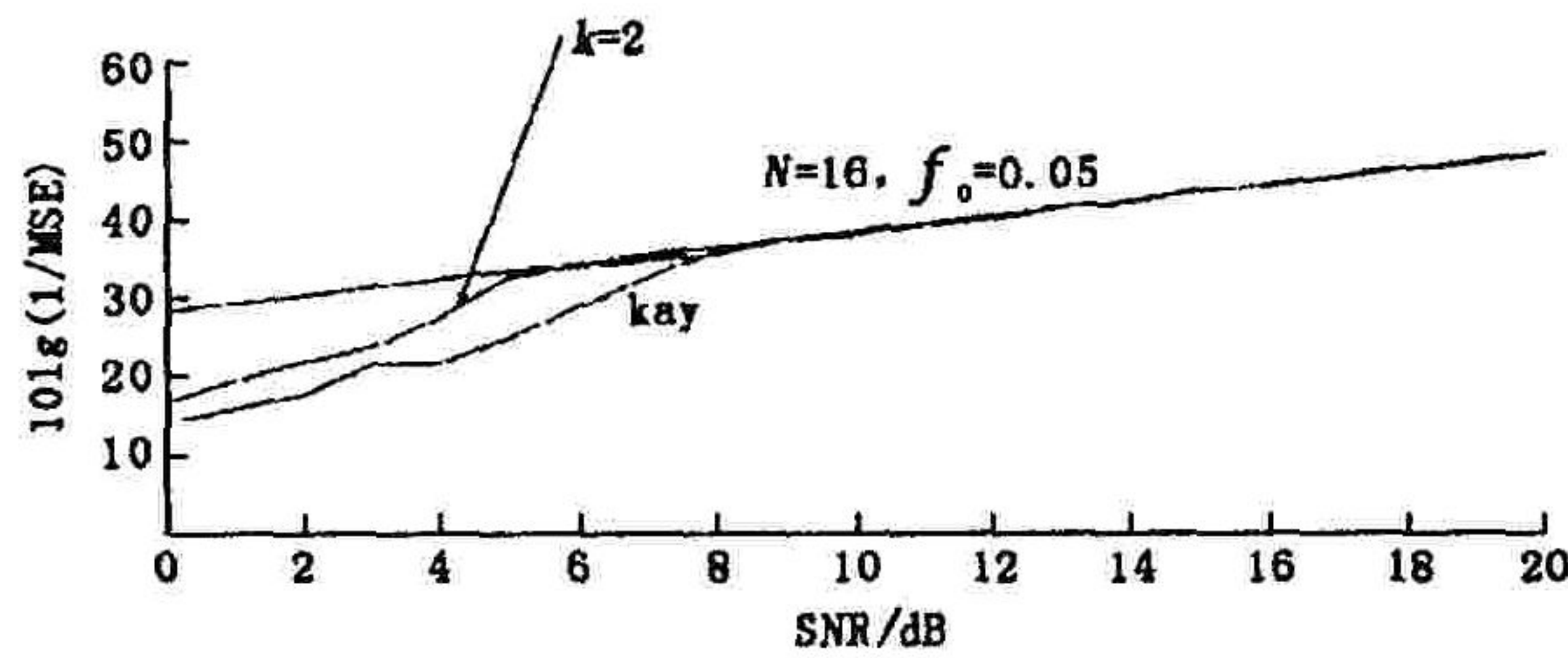


图 5 滤波器法降低 SNR 阈值

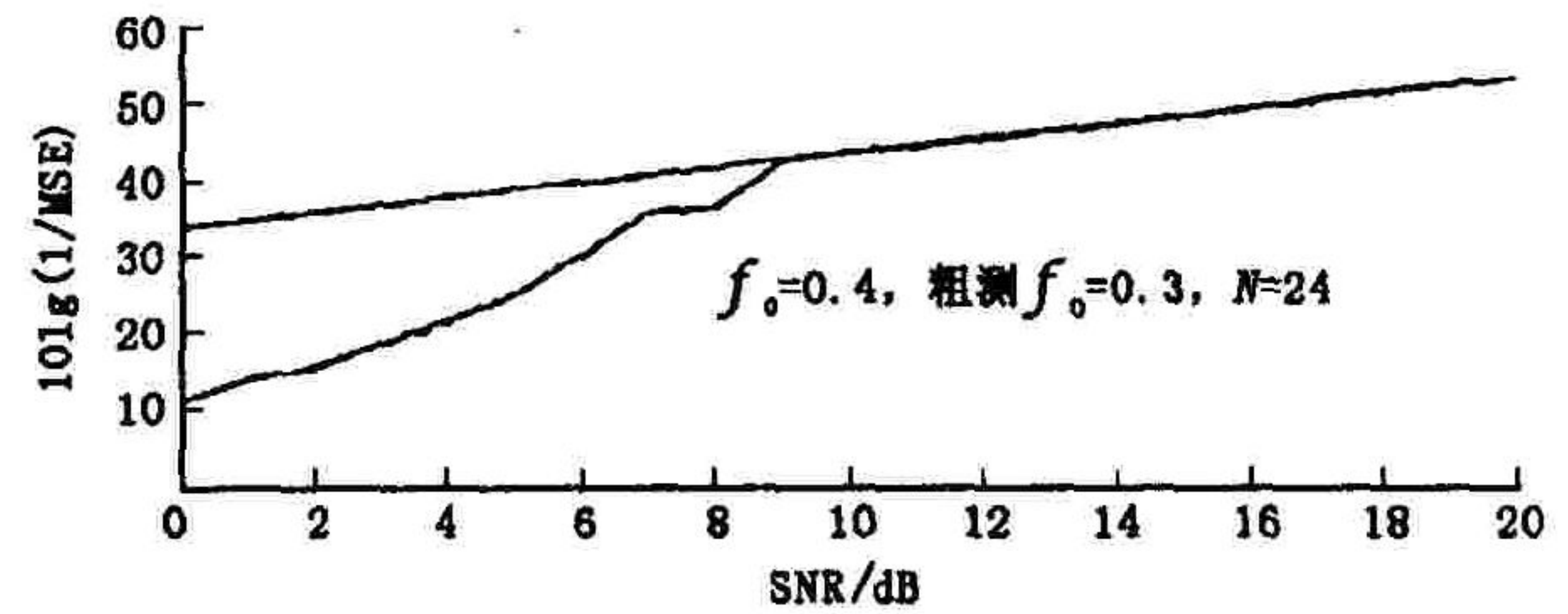


图 6 频率粗估计后测频性能图

这种方法降低在 SNR 阈值上比滤波器法有效, 但代价是运算复杂度的增加, 除需事先频率粗估计外, 还需对每个采样数据进行一次复数乘法。但相对 SNR 门限降低的程度计算量的增加可以接受。

### 3.3 滤波器组方法

首先对信号  $y(n)$  分别乘以  $e^{-j\pi/2n}, e^{-j0/2n}, e^{-j\pi/2n}, e^{-j\pi/n}$ 。得到  $y_1(n), y_2(n), y_3(n), y_4(n)$ 。然后通过 2 阶滤波器并以抽取比 2 进行抽取, 得到  $a_i(n) = y_i(2n) + y_i(2n-1), n = 1, 2, \dots, N/2$  对抽取后的 4 个输出信号进行统计检测  $\Gamma_i = \left| \sum_{n=1}^{N/2} a_i^*(n)a_i(n+1) \right|^2$ 。选择使  $\Gamma_i$  最大的信号  $a_m(n)$ , 得到被估计频率粗估计  $\hat{\omega}_c = (m-2)\pi/2$  计算相位差分  $\Delta\phi_m(n) = \arg(a_m(n+1)a_m^*(n))$ , 然后进行频率精确估计  $\hat{\omega}_f = \sum_{n=1}^{N/2-1} h(n)\Delta\phi_m(n)$ 。被估计的频率即为  $\hat{\omega}_0 = \hat{\omega}_c + \hat{\omega}_f, m = 1, \hat{\omega}_0 = \hat{\omega}_f + \pi/2; m = 2, \hat{\omega}_0 = \hat{\omega}_f; m = 3, \hat{\omega}_0 = \hat{\omega}_f - \pi/2; m = 4, \hat{\omega}_0 = (\hat{\omega}_f - \pi) \bmod{2\pi}$ 。

这种方法综合利用上述的两种方法, 即利用了用 FIR 滤波器增加输入信号信噪比, 又将滤波器的中心频率作为信号频率的粗估计来降低 SNR 阈值。降低门限效果更加明显。

## 4 结论

文章对 Kay 法存在的 SNR 阈值做了较详细的分析, 一个原因是相位差分运算, 一个原因是含高斯白噪声的复正弦信号的包络和相位的近似分布, 从而导致 SNR 阈值的存在。并提出了几种有效降低 SNR 阈值的方法。这些方法在运算量和复杂度方面与 Kay 法相比增加不大。计算机仿真验证了方法的有效性。

### 参考文献:

- [1] Tretter S A. Estimating the Frequency of a Noisy Sinusoid By Linear Regression[J]. IEEE Trans IT, 1985, (31): 832 - 840.
- [2] Kay S M. Statistically/Computationally Efficient Frequency Estimation[A]. Proc IEEE ICASSP, 1988.
- [3] Fitz M D. Further Results in the Ffast Eestimation of a Ssingle Ffrequency[J]. IEEE trans Commun, 1994, Com42: 863 - 864.
- [4] Luise M, Reggiannini R. Carrier Frequency Recovery in the All Digital Modems for Burst Mode Transmissions[J]. IEEE Trans Commun, 1995, com43: 1169 - 1177.
- [5] Lang S W, Musicus B R. Frequency Estimation From Phase Differences[A]. Proc IEEE ICASSP, 1989.
- [6] Umesh S, Nelson D. Computationally Efficient Estimation of Sinusoidal Frequency at Low SNR[A]. Proc IEEE ICASSP, 1996.

(编辑: 姚树峰)

(下转第 58 页)