多通道防空导弹武器系统作战效能分析的排队模型研究

韩俊杰，　李为民，　刘付显
(空军工程大学导弹学院，陕西三原 713800)

摘要：根据现代防空导弹武器系统面临的作战环境和空袭模式，结合防空导弹武器系统的射击原理，建立了防空导弹武器系统效能分析的排队模型，并对所建模型的统计平衡特性进行了论证研究。

关键词：防空导弹武器系统；效能分析；排队论；统计平衡

中图分类号：TJ393　　**文献标识码**：A　**文章编号**：1009-3516(2005)04-0020-03

目前,在防空导弹武器系统的效能分析中普遍采用统计试验法,由于该方法需要足够多的样本和抽样数据来确保计算结果的可信性,使得它难以适应对实时性、快速性要求较高的现代防空作战环境。而基于排队论的效能分析模型在解析中融入了统计分析的特征,模型简单,复杂性低,克服了统计试验法耗时的缺陷。本文在分析用排队论知识建立防空作战效能分析模型的基础上,着重研究了效能分析排队模型的统计平衡特性。

1 建模分析

近代的局部战争表明:现代的空袭环境多以小编队、多批次连续入侵为主,各编队到达时间是随机的,编队中各目标间隔与编队间隔相比很小;由于目标飞行具体参数的影响和防空导弹武器系统本身的随机性,使得武器系统的射击时间也是一个随机变量;此外区域防空成了现代防空的基本形式,防区是有一定宽度和纵深的,因而目标在火力单元杀伤区内的逗留时间同样具有随机性。根据防空导弹武器系统射击原理和目标空袭模式的分析,可以对空袭目标到达杀伤区的情况、武器系统火力单元的服务能力、目标在杀伤区内滞留时间即排队情况作如下基本假设:

1)每个编队均由 m 个目标组成,并以批为单位,把目标流视为最简单流,目标流的平均密度为 λ 批/分;

2)假定防空导弹武器系统由 n 个目标通道,每个目标通道对入侵的敌机编队中所有目标具有同等的射击条件,并根据自己忙或闲的状态随机地选择射击目标,各个通道射击一个目标的时间服从参数为 μ 的指数分布;

3)不考目标的对抗行动,各火力单元工作可靠,火力单元结束对前一个目标的射击,便转向杀伤区内的任意未遭到射击的目标进行射击;若目标飞到杀伤区远界而未遭到拦截,目标就视为突防;被击中的目标视为消失。

基于假设,具有 n 个目标通道的防空导弹武器系统,相当于一个有 n 个通道的消失制随机服务系统。该系统应有下列 $n+s$ 个状态,并用时刻 t 处于某杀伤区内空袭目标的随机数量 $N(t)$ 取为随机服务系统的状态:

收稿日期:2004-10-15
基金项目:高等学校骨干教师资助计划基金项目(GG-110-90039-1004)
作者简介:韩俊杰(1975-),男,河南民权人,博士生,主要从事区域防空反导运筹分析研究;
李为民(1964-),男,甘肃民勤人,教授,博士生导师,主要从事军事仿真和区域防空反导运筹分析研究;
刘付显(1966-),男,山东单县人,教授,主要从事防空作战运筹分析研究.

1) $N(t)=0$，武器系统每个目标通道都没有射击，即服务系统所有通道全部空着；

2) $N(t)=k$，武器系统有 k 个目标通道正在射击，即服务系统有 k 个通道被占用，$(k=1,2,\cdots,n-1)$；

3) $N(t)=n$，武器系统所有目标通道都正在射击，即服务系统 n 个通道全部被占用；

4) $N(t)=n+s$，武器系统所有目标通道都在射击，同时还有 $s(s=1,2,\cdots)$ 个目标在杀伤区内未遭到射击，即服务系统内还有 s 个顾客在排队等待服务。

系统的可能状态及状态转移情况如图1所示。

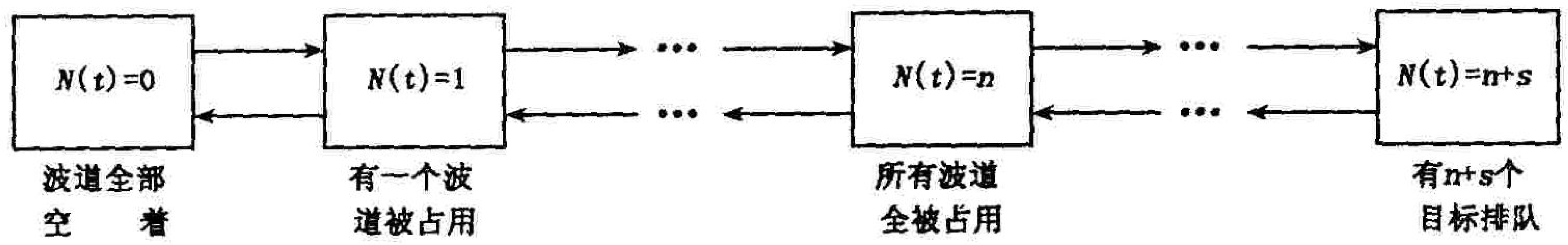

图1　防空导弹武器系统各目标通道状态转移示意图

利用排队论状态分析过程：①过程中状态的转移仅仅限于从一个状态向其临近状态转移，即如状态处于 $k,(k\geq 1)$，则可转移到 $(n+1)$ 或 $(n-1)$ 状态；如状态处于0状态，则仅可转移到状态1；如状态在其最大排队容量 $(n+s)$，则仅可转移到 $(n+s-1)$；②如在 t 时刻过程处于 k 状态，则在 $(t,t+\Delta t)$ 内产生由状态 k 转移到状态 $k+1$ 的概率为 $\lambda_k(t)\Delta t+O(\Delta t)$，产生由 k 状态转移到 $(k-1)$ 状态的概率为 $\mu_k(t)\Delta t+O(\Delta t)$，其中 $\lambda_k(t)$、$\mu_k(t)$ 为 t 的函数；③在 $(t,t+\Delta t)$ 内转移二个或二个以上状态的概率为 $O(\Delta t)$。结合防空导弹武器系统射击单元采取"射击—观察—射击"的射击准则和状态转移的实际情况，根据上述假设和状态转移图1，可建立防空导弹武器系统作战效能分析在 $n>m$ 情况下的排队模型，即状态转移的概率微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda P_0+\mu P_1\\ \dfrac{\mathrm{d}P_k(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda+k\mu)P_k+(k+1)\mu P_{k+1} & k=1,2,\cdots,m-1\\ \dfrac{\mathrm{d}P_k(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda P_{k-m}-(\lambda+k\mu)P_k+(k+1)\mu P_{k+1} & k=m,m+1,\cdots,n-1\\ \dfrac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda P_{n-m}-(\lambda+n\mu)P_n+(n\mu+v)\mu P_{n+1}\\ \dfrac{\mathrm{d}P_{n+s}(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda P_{n+s-m}-(\lambda+n\mu+sv)P_{n+s}+[(n\mu+(s+1)v)]P_{n+s+1} & s=1,2,\cdots\end{cases}\tag{1}$$

其中 $P_k(t)$ 表示系统处于上述各状态的概率。

2　统计平衡分析

下面对防空导弹武器系统各目标通道对目标射击的随机过程 $N(t)$ 具有统计平衡状态进行证明，在此引入如下定理：

定理1[2]　对于一个具有可数或有限状态的不可约的 Markov 链，设其转移概率函数为 $P_{ij}(t)$，若

$$\lim_{t\to 0}P_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\tag{2}$$

则有 $\lim\limits_{t\to 0}P_{ij}(t)=P_j$ 存在并与初始条件无关，同时，要么所有的 $P_j=0$，要么所有的 $P_j>0$，且 $\{P_j\}$ 构成一概率分布。

从定理1便可得到引理1。

引理1[3]　对于一具有可数状态的不可约 Markov 链，若其转移概率函数满足式(2)，且 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}P_j(t)=1$，则 $\lim\limits_{t\to 0}P_{ij}(t)=P_j>0$ 存在并与初始条件无关。

证明　若 $\rho=\dfrac{m\lambda}{n\mu}<1$，易知可数状态的 Markov 过程 $N(t)$ 满足定理1的条件，因而 $\lim\limits_{t\to 0}P_{ij}(t)=P_j$ 存在，

又由全概率定理知

$$P_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_i(0) P_{ij}(t) \tag{3}$$

考虑 $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) = 1$,令 $t \to \infty$ 对上式取极限,可得到

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} P_i(0) \cdot \lim_{t\to\infty} P_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} P_i(0) \cdot P_j = P_j \tag{4}$$

即 $P_j(t)$ 的极限存在且与初始条件无关。

再对式 $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(t) = 1$,令 $t \to \infty$ 对上式取极限有

$$\lim_{t\to\infty} P_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} P_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_j = 1 \tag{5}$$

所以由定理 1 可知 $P_j > 0 (j = 0,1,\cdots)$,且构成一概率分布。

为给出多通道防空导弹武器系统作战效能分析的统计平衡特性,可根据定理 1 和引理 1 得到引理 2。

引理 2 若微分方程组(1) 的右端极限存在,则左端极限存在,且

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}P_i(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad i = 0,1,\cdots \tag{6}$$

证明 由引理 1 可知, $t \to \infty$ 时方程的右端极限存在,因而左端极限

$$\lim_{t\to\infty} P'_i(t) \qquad i = 0,1,\cdots \tag{7}$$

也存在。若左端极限不为零,令 $\lim\limits_{t\to\infty} P'_i(t) = c_i \neq 0$,假使 $c_i > 0 (c_i < 0$ 同样可证),取一正值 $a_i > 0$,使得 $c_i > a_i$,则应存在一个 t_0 值满足 $t \geqslant t_0$时 $P'_i(t) \geqslant a_i$, 故

$$\begin{aligned} P_i &= \lim_{t\to\infty} P_i(t) = \lim_{t\to\infty} [P'_i(t_0) + \int_0^t P'_i(t) P'_i(u) \mathrm{d}u] \geqslant P_i(t_0) + \lim_{t\to\infty} \int_0^t a_i \mathrm{d}u = \\ & P_i(t_0) + \lim_{t\to\infty} a_i (t - t_i) = +\infty \end{aligned} \tag{8}$$

这与引理 1 的结论相矛盾,因而必有

$$\lim_{t\to\infty} P'_i(t) = 0 \qquad i = 0,1,\cdots$$

证毕。

根据引理 1 和引理 2,可由上述各式得出 $n > m$ 情况下的防空导弹效能分析的线性解析模型为

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ -(\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \qquad k = 1,2,\cdots,m-1 \\ \lambda P_{k-m} - (\lambda + k\mu) P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \qquad k = m, m+1,\cdots,n-1 \\ \lambda P_{n-m} - (\lambda + n\mu) P_n + (n\mu + v)\mu P_{n+1} = 0 \\ \lambda P_{n+s-m} - (\lambda + n\mu + sv) P_{n+s} + [(n\mu + (s+1)v)] P_{n+s+1} = 0 \qquad s = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{9}$$

从式(9)得到的解便称为防空导弹武器系统目标通道效能分析的稳态解,该解应该在各目标通道射击目标时持续较长时间的条件下才比较准确,但在实际应用中防空战斗持续时间超过目标通道射击一个目标所需平均时间即平均服务时间的 2 ~3 倍[4]时,上面的公式便符合防空导弹射击的条件,并能基于此解作出正确合理的作战决策。

3 结束语

基于同样的原理还可以得到 $n < m$ 及 $n = m$ 情况下的线性解析模型,并满足统计平衡特性,这 3 种情况下的模型便组成了完整的目标成批到达作战分析的线性解析模型,即排队模型。本文的模型可用于多通道防空导弹武器系统效能的分析,并为排队论知识适用于防空导弹武器系统效能分析提供了理论支持。

(下转第 33 页)