关于单位圆内代数体函数的最大型博雷尔点

刘孝书， 郭志林

(商丘师范学院数学系，河南商丘 476000)

摘要：在开平面上有穷正级代数体函数存在最大型博雷尔方向这一工作成果的基础上，证实了单位圆内有穷正级代数体函数的最大型博雷尔点的存在性。

关键词：代数体函数；最大型博雷尔点；单位圆

中图分类号：O174.52 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-3516(2005)03-0092-03

高宗升、孙道椿在文献[1]中证明了开平面上有穷正级代数体函数存在最大型博雷尔方向。按顾永兴、孙椿道猜测，单位圆内有穷正级代数体函数存在最大型博雷尔点，本文证实了这一结论，得到：

定理 设 $\omega(z)$ 为 $|z|<1$ 内由方程

$$A_v(z)\omega^v + A_{v-1}(z)\omega^{v-1} + \cdots + A_0(z) = 0 \tag{1}$$

定义的 v 值代数体函数，其中 $A_0(z),A_1(z),\cdots,A_v(z)$ 是 $|z|<1$ 内无公共零点的全纯函数。$\omega(z)$ 的级 $\rho \in (0,+\infty)$，$U(r)=r^{\rho(r)}$ 是其型函数，则存在一点 $e^{i\theta_0}(0\leq\theta_0<2\pi)$，使得对 $\forall\delta\in(0,\pi/2)$，$\forall a\in\mathbf{C}$，有

$$\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{n(r,\Delta(\theta_0,\delta),a)}{U(\frac{1}{1-r})}>0$$

至多除去 $2v$ 个例外值，此点 $e^{i\theta_0}$ 称为 $\omega(z)$ 的最大博雷尔型点。

1 记号与引理

本文中出现的记号 $T(r,\omega)$，$S(r,\omega)$，$n(r,a)$，$n(r,\tilde{R}_z)$，$N(r,\tilde{R}_z)$ 等如通常所定义。另还记

$$\Delta(\theta_0,\delta)=\{z:|\arg z-\theta_0|<\delta\}\triangleq\Delta(\theta_0-\delta,\theta_0+\delta)\qquad 0\leq\theta_0<2\pi\qquad 0<\delta<\pi/2$$
$$\overline{\Delta}(\theta_0,\delta)=\{z:|\arg z-\theta_0|\leq\delta\}\triangleq\overline{\Delta}(\theta_0-\delta,\theta_0+\delta)$$

为证明此定理，先给出

引理1[2] 设 $\omega(z)$ 为 $\Delta(\varphi_1,\varphi_2)\cap\{z:|z|<1\}$ 内由式(1)所定义的 v 值代数体函数，若 $\{a_j\}_{j=1}^{q}(q\geq3)$ 为 q 个不同的复数，则对 $\forall\varphi,\delta',\delta(0<\delta'<\delta,\varphi_1<\varphi-\delta<\varphi+\delta<\varphi_2)$ 及任意正整数 l(记 $R=(lr+1)/(l+1)$)有

$$(q-2)S(r,\Delta(\varphi-\delta',\varphi+\delta'))<\sum_{j=1}^{q}n(R,\Delta(\varphi-\delta,\varphi+\delta),a_j)+n(R,\Delta(\varphi-\delta,\varphi+\delta),\tilde{R}_2)+O(1/(1-r))$$

引理2 设 $\omega(z)$ 为 $|z|<1$ 内由式(1)所定义的 v 值代数体函数，其级为 $\rho\in(0,+\infty)$，$U(r)=r^{\rho(r)}$ 为其型函数。$m(\geq4)$ 为一正整数，令 $\theta_i=2\pi j/m$，$\Delta(\theta_i)=\{z:|\arg z-\theta_i|<2\pi/m\}$，$i=0,1,\cdots,m-1$，则这 m 个角域 $\{\Delta(\theta_i)\}_{i=0}^{m-1}$ 中至少有一个 $\Delta(\theta_i)$，使得对 $\forall a\in\mathbf{C}$ 有

$$\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{n(r,\Delta(\theta_0),a)}{U(\frac{1}{1-r})}>0$$

收稿日期：2004-09-10
基金项目：河南省教育厅自然科学基金资助项目(0211062106)
作者简介：刘孝书(1957-)，男，河南商丘人，副教授，主要从事复变函数论研究.

至多除去 $2v$ 个例外值 a。

证明　若不然,即对每个角域 $\{\Delta(\theta_i)\}_{i=0}^{m-1}$,至少存在 $q = 2v+1$ 个例外值 $a_i^j (j = 1,2,\cdots,q)$,使得

$$\overline{\lim_{r\to 1^-}} \frac{n(r,\Delta(\theta_0),a_i^j)}{U(\frac{1}{1-r})} = 0$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$,当 r 充分接近 1 时,对 i,j 一致地有

$$n(r,\Delta(\theta_i),a_i^j) < \varepsilon U(\frac{1}{1-r}) \tag{2}$$

设 $\theta_{i,k} = (2\pi i/m) + (2k\pi/\alpha m)(0 \leqslant i \leqslant m-1, 0 \leqslant k \leqslant \alpha - 1)$。其中 α 为任意正整数,对任意给定的正整数 l(记 $R = (lr+1)/(l+1)$),设 $\Delta_{i,k} = \{z : |z| < R, \theta_{i,k} \leqslant \arg z \leqslant \theta_{i,k+1}\}$,则 $\{z:|z| \leqslant R\} = \sum_{k=0}^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{m-1}\Delta_{i,k}$,这样必有一个 k ,不妨设 $k = 0$,使得

$$\sum_{i=0}^{m-1} n(\Delta_{i,0},\tilde{R}_z) \leqslant \frac{1}{\alpha} n(R,\tilde{R}_z)$$

取角域

$$\bar{\Delta}_i = \{z:(\theta_{i,0}+\theta_{i,1})/2 \leqslant \arg z \leqslant (\theta_{i+1,0}+\theta_{i+1,1})/2\} \qquad \Delta_i^0 = \{z:\theta_{i,0} < \arg z < \theta_{i+1,1}\}$$

由于 $\bigcup_{i=0}^{m-1}\Delta_i^0$ 在 $\bigcup_{i=0}^{m-1}\Delta_i^0$ 上复盖两次,因此有

$$\sum_{i=0}^{m-1} n(R,\Delta_i^0,\tilde{R}_z) \leqslant (1+(1/\alpha))n(R,\tilde{R}_z)$$

利用引理 1 于 $\Delta_i^0,\tilde{\Delta}_i$ 上可得

$$(q-2)S(r,\tilde{\Delta}_i) < \sum_{j=1}^{q} n(R,\Delta_i^0,a_i^j) + n(R,\Delta_i^0,\tilde{R}_z) + O(1/(1-r))$$

从而

$$(q-2)S(r,\omega) < \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{q} n(R,\Delta_i^0,a_i^j) + (1+\frac{1}{\alpha})n(R,\tilde{R}_z) + O(1/(1-r))$$

将式(2) 代入上式得

$$(q-2)S(r,\omega) < mq\varepsilon U(\frac{1}{1-r}) + (1+\frac{1}{\alpha})n(R,\tilde{R}_z) + O(1/(1-r))$$

上式两边同除以 vr 并从 0.1 到 r 积分得

$$(q-2)T(r,\omega) < (mq\varepsilon/v)\int_{0.1}^{r}\frac{U(\frac{1}{1-t})}{t}\mathrm{d}t + (1+\frac{1}{\alpha})N(R,\tilde{R}_z) + O(1/v)\int_{0.1}^{r}\frac{(\frac{1}{1-t})}{t}\mathrm{d}t + O(1) \tag{3}$$

注意到

$$N(R,\tilde{R}_z) \leqslant 2(v-1)T(R,\omega) + O(1), R = (lr+1)/(l+1) \tag{4}$$

又由型函数 $U(r)$ 性质[3] 可得

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{T(R,\omega)}{U(\frac{1}{1-r})} \leqslant \overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{T(R,\omega)}{U(\frac{1}{1-R})}\cdot\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{U(\frac{1}{1-R})}{U(\frac{1}{1-r})} =$$

$$\overline{\lim_{R\to 1}}\frac{T(R,\omega)}{U(\frac{1}{1-R})}\cdot\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{U(\frac{l+1}{l}\cdot\frac{1}{1-r})}{U(\frac{1}{1-r})} = (\frac{l+1}{l})^{\rho}\cdot\overline{\lim_{r\to 1^-}}\frac{\int_{0.1}^{r}\frac{U(\frac{1}{1-t})}{t}\mathrm{d}t}{U(\frac{1}{1-r})} =$$

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{\int_{0/9}^{y}\frac{u(x)}{x(x-1)}\mathrm{d}x}{U(y)} \leqslant \overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{U(y)}{y(y-1)U'(y)} =$$

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{y^{\rho(y)}}{y(y-1)(y^{\rho(y)}\cdot\rho'(y)\ln y+y^{\rho(y)}\cdot\frac{\rho(y)}{y})}=$$

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{1}{y(y-1)\rho'(y)\ln y+(y-1)\rho(y)}=0$$

$$\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{\int_{0.1}^{r}\frac{1}{t(1-t)}dt}{U(\frac{1}{1-r})}=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{\int_{0/9}^{r}\frac{dx}{x-1}}{U(y)}\leqslant\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{1}{(y-1)U'(y)}=$$

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{1}{y^{\rho(y)}((y-1)\rho'(y)\ln y+(y-1)/y)\cdot\rho(y))}=0$$

将式(4) 代入式(3),然后两边同除以 $U(\frac{1}{1-r})$,并让 $r\to1-$,取上极限可得

$$(q-2)\leqslant2(v-1)(1+\frac{1}{\alpha})(\frac{l+1}{l})^{\rho}+O(1)$$

让 $\alpha\to+\infty$,$l\to+\infty$ 得

$$q-2\leqslant2(v-1)$$

这与 $q=2v+1$ 矛盾。故引理 2 得证。

2 定理的证明

证明 由引理 2 知,对任意给定的正整数 m ,总存在一个角域 $\Delta_m=\{z:|\arg z-\theta_m|<\frac{2\pi}{m}\}$,使得对 $\forall a\in \mathbf{C}$,有

$$\overline{\lim_{r\to1^-}}\frac{n(r,\Delta_m,\alpha)}{U(\frac{1}{1-r})}>0$$

至多除去 $2v$ 个例外值 α,选取子序列后,不失一般性可设 $\theta_m\to\theta_0(m\to\infty)$,则 $e^{i\theta_0}$ 便满足定理的要求。

参考文献:

[1] 高宗升,孙道椿. 关于代数体函数的最大型 Borel 方向 [J]. 数学年刊,1997,18(6):701-710.

[2] 刘敏思,李纯红. 单位圆盘内一类亚纯代数体函数的最大型聚值点 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版),1995,29(3):285-288.

[3] 杨 乐. 值分布论及其研究 [M]. 北京:科学出版社,1982.

(编辑:田新华)

On the Maximum Borel Point of Algebroidal Function in a Unit Circle

LIU Xiao - shu, GUO ZHI - lin

(Department of Mathematics, Shangqiu Teachers College, Shangqiu, Henan 476000, China)

Abstract:The paper proves the existence of the maximum Borel Point of algebroidal function with finite order in a unit circle.

Key words:algebroidal function; maximum Borel Point; unit circle