

### 基于逆 DEA模型的防空导弹装备采办分析

李凌鹏, 李为民, 郭乃林

(空军工程大学导弹学院, 陕西三原 713800)

摘要: 为了对防空导弹装备采办进行定量分析, 以现有防空导弹的技术性能指标为基础, 建立逆 DEA模型来测算在某型导弹有效值不变的条件下, 某项性能指标值波动对导弹采购费用的影响。计算得出的拟合曲线对防空导弹装备采办具有一定的预测作用。

关键词: DEA模型; 有效性; 装备采办; 多目标规划

中图分类号: O224 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2005)03-0029-04

数据包络分析( DEA)是运筹学研究的一个新领域,自 1978 年美国运筹学家 A. Charnes 等提出以来已在许多领域得到应用和发展<sup>[1-2]</sup>。逆 DEA 模型<sup>[3-4]</sup>是 DEA 模型的反问题,它讨论的问题是:在决策单元 DMU 效率评价指数不变的情况下,当输入水平给定时,估计输出值。在正常状态下,决策单元的技术结构在短期内不会发生重大改变,尤其对武器装备水平而言,其发展是一个缓慢的过程。因此,逆 DEA 模型可以进行短期预测和处理当前效率水平下的资源配置问题。本文把逆 DEA 模型应用于防空导弹装备采办<sup>[5-6]</sup>分析,为装备采办提供定量分析依据。

## 1 防空导弹装备采办 DEA 模型的建立

在防空导弹装备采办分析中,首先要确定评价指标,包括 5 个输入指标,即导弹的最大射程(km)、最大射高(km)、最大速度(M)、最大机动过载(g)和单发杀伤概率,均为产出型指标;一个输出指标——导弹的采购费用(万元),为投入型指标。显然,投入型指标与产出型指标的比值(称为效率评价指数)越小越好,以此为目标函数建立 DEA 模型。

目前,DEA 评价模型<sup>[3,7]</sup>主要有  $C^2R$ 、 $C^2GS^2$  以及相应的(区域)限制模型等 4 个基本模型, $C^2W$ 、 $C^2WH$  等两个锥比率模型, $C^2WY$  一个综合模型,这些模型可以用来评价单元的技术有效性和规模有效性。本文适合采用  $C^2GS^2$  模型,主要是考虑到现阶段武器采购经费有限但又要尽量买到性能好的防空导弹。

假设有一个决策单元集  $U_j(j=1,2,\dots,n)$ ,表示  $j$  型导弹的采购情况, $X_j$  是  $U_j$  的输入向量, $Y_j$  是  $U_j$  的输出向量,则测算  $U_{j_0}(X_0, Y_0)$  相对效率的对偶问题 DP 为

$$DP \left\{ \begin{array}{l} \max \quad V_D = \theta \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + s_i^- = \theta X_0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \quad \quad \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j - s_r^- = \theta Y_0, \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \quad \quad s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

收稿日期:2004-10-21

基金项目:国家高等学校骨干教师资助计划资助项目(GG-110-90039-1004)

作者简介:李凌鹏(1979-),男,湖北天门人,博士生,主要从事区域反导作战运筹与仿真;

李为民(1964-),男,甘肃民勤人,教授,博士生导师,主要从事军事系统工程和防空反导作战运筹分析研究。

式中,  $s_i^-, s_r^+$  为松弛变量。设 DP 目标函数  $V_D$  的最优值为  $\theta_k^*$ ,  $0 < \theta \leq 1$ , 若  $\theta_k^* = 1$ , 则称  $U_{k_0}$  有效。

## 2 逆 DEA 模型的建立

式(1)的逆问题是, 当  $U_{k_0}$  的输出从  $Y_0$  增加到  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)^T = Y_0 + \Delta Y^0, \Delta Y^0 > 0$ , 在最优效率指数  $\theta_k^*$  保持不变的情况下, 估计输入向量  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T = X_0 + \xi \Delta X^0, \Delta X^0 > 0$ , ( $\xi$ , 表示输出按固定比例变化)。由式(1)可知, 决策单元  $U_{k_0}$  的相对效率在投入不变的条件下, 实际上等于产出与生产前沿面距离的最大值, 即反映的是决策单元的最好效率。于是, 可转化为如下多目标规划问题<sup>[8]</sup> VP

$$VP \left\{ \begin{array}{l} V - \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + s_i^- = \theta_k^* \alpha \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j - s_r^- = \beta \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ s_i^- \geq 0 \quad s_r^+ \geq 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

和线性规划问题  $P_1$

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} \max V_D = \theta \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + s_i^- = \theta \alpha^0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j - s_r^+ = \beta \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ s_i^- \geq 0 \quad s_r^+ \geq 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

易证明:  $U_{k_0}$  DEA 有效等价于  $(X_0, Y_0)$  是式(2)的 Pareto 解; 式(2)和式(3)是等价关系。为了将式(3)转化为线性多目标规划问题, 给出以下定理。

**定理<sup>[9]</sup>** 设关于  $U_{k_0}$  的式(1)的最优值为  $\theta_k^*$ , 当输出从  $Y_0$  增加到  $Y_0 + \Delta Y^0$  时, 有

1)  $(\alpha^0, \lambda^0)$  是多目标问题式(2)的弱 Pareto 解, 那么线性规划问题式(3)的最优值是  $\theta_k^*$ , 即输入增加到  $\alpha^0$  时, 保持效率指数不变;

2) 若  $(\alpha^0, \lambda^0)$  是多目标问题式(2)的可行解, 如果线性规划问题式(3)的最优值是  $\theta_k^*$ , 则  $(\alpha^0, \lambda^0)$  是多目标式(2)的弱 Pareto 解。

由定理 1 得知, 逆 DEA 问题可以转化为线性多目标规划问题, 进而转化为单目标规划问题。可以采用文献[8]的模糊数学方法进行单目标求解, 也可采用线性加权的方法求解, 不管是哪种方法, 都要根据实际情况由决策者给定输入、输出向量的上下限。考虑以下线性规划问题  $P_2$

$$P_2 \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \xi \\ \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + s_i^- = \theta_k^* (X_0 + \xi \Delta X^0), \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j - s_r^+ = Y_0 + \Delta Y^0, \quad r = 1, 2, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

由多目标规划理论<sup>[10]</sup>知, 式(4)的最优解一定是多目标规划式(2)的弱 Pareto 解。若  $\xi$  是式(4)的最优值, 那么当  $U_{k_0}$  的输出变量增加  $\Delta Y^0$  时, 输入变量增加到  $X_0 + \xi \Delta X^0$ , 此时效率指数保持不变。

### 3 逆 DEA 模型在防空导弹装备采办分析中的应用

应用逆 DEA 模型的求解过程为:①搜集、整理数据;②评价各方案的有效性;③应用线性规划问题  $P_2$  求出逆问题;④对输入输出的动态变化进行分析,得出结论。下面给出 10 种不同型号的防空导弹的输入输出数据,并计算出  $C^2GS^2$  效率值和有效性(0 表示非有效,1 表示有效),如表 1 所示。

表 1 输入输出数据及有效性

决策单元序号	最大射程 /km	最大射高 /km	最大速度 /M	最大机动过载/g	单发杀伤概率	采购费用 /万元	效率值	有效性
1	15	6	2	30	0.8	18	0.980	0
2	6.2	3.5	2	25	0.6	18.7	0.237	0
3	8.5	3	2.2	25	0.7	11.9	0.824	0
4	22.2	3	2.5	22	0.75	19.2	1.000	1
5	74	24	3	23	0.75	44.7	1.000	1
6	80	24	6	30	0.75	69.5	1.000	1
7	16	12	2.5	15	0.7	6.2	0.935	0
8	9.1	3	2	20	0.75	18.78	0.329	0
9	25	11	2.5	15	0.8	14.5	0.940	0
10	120	27	2.5	15	0.7	38.3	1.000	1

从表 1 可知,有效决策单元有 4 个,其余为非有效单元。以非有效单元  $U_7$  为例,保持其效率值  $\theta_7^* = 0.935 < 1$  不变,对输入输出指标之间的变化关系进行说明。设定每个输入增量的分量只有一个发生改变,目的是便于在平面直角坐标系内反映单输入单输出指标的关系。

设 5 个输入指标增量的步长分别为:0.2 km、0.1 km、0.1 M、1 g、0.005。对每个输入指标取 5 个点,拟合曲线如图 1 ~ 图 5(纵坐标为产出型指标,横坐标为投入型指标),发现最大射程和最大速度增加到一定数量以后,继续增加对采购费用的影响逐渐变小;机动过载和射高曲线在开始增加平缓,继续增加则采购费用剧增;杀伤概率曲线比较平缓,说明同类型的导弹在比较性价比时可以暂不考虑杀伤概率的影响。以上分析说明类似该型号的导弹,增加射程和机动过载对采购费用影响不大,重要的是看其速度和射高。对于其他 5 种非有效决策单元也采用上述的计算方法,得出的结论各不相同,说明各型号的采购方案要区别对待。

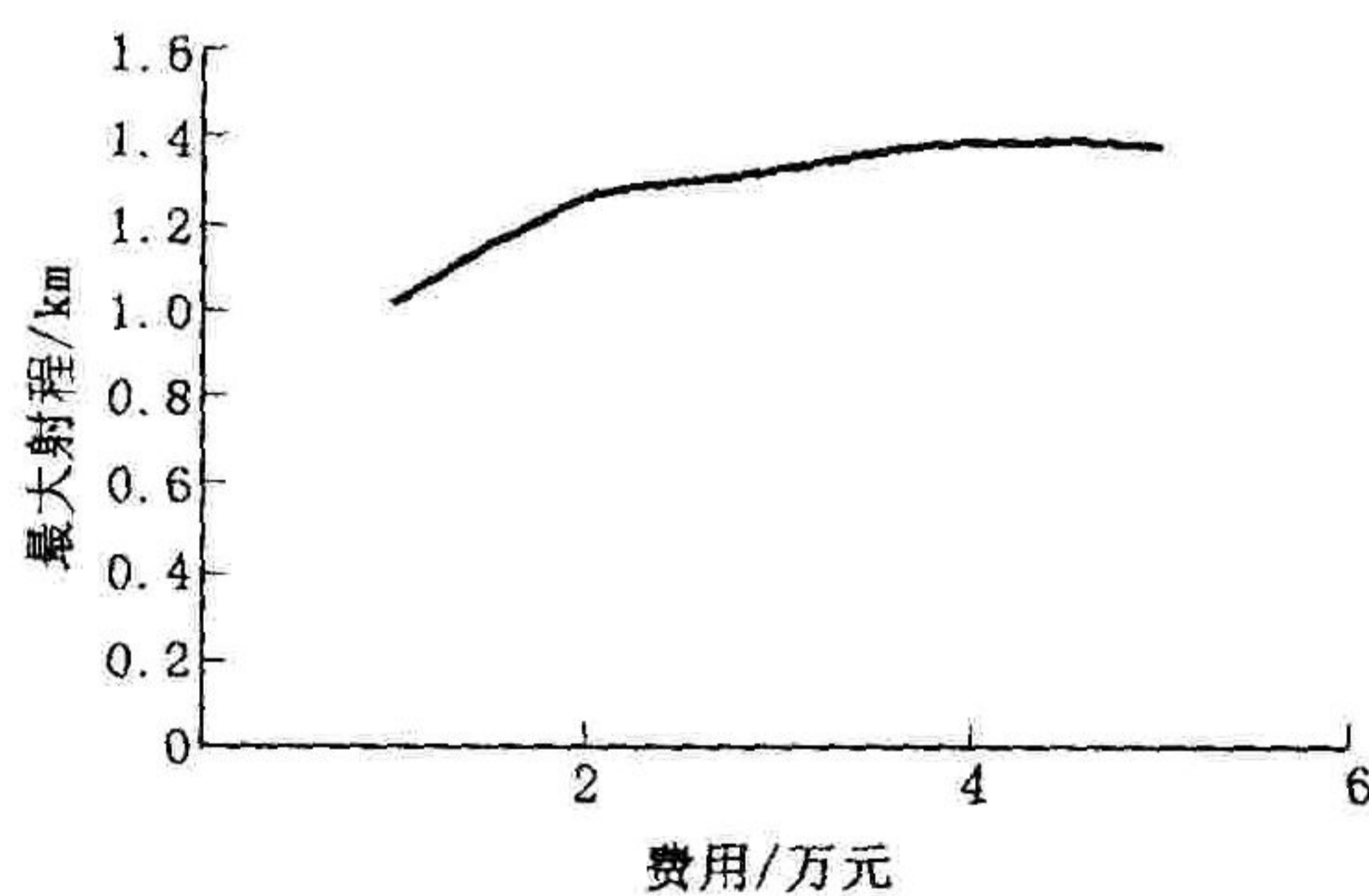


图 1 最大射程与费用

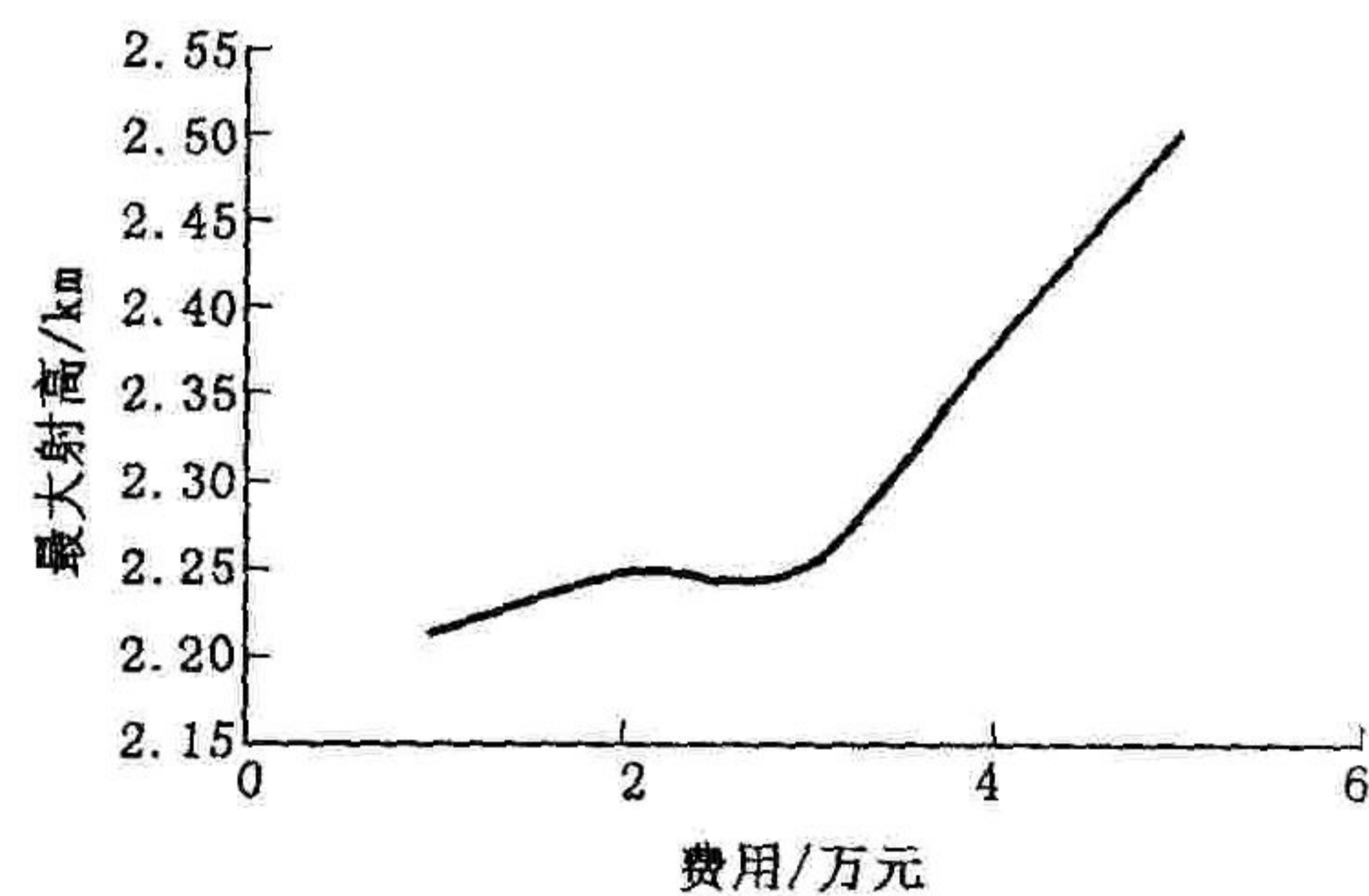


图 2 最大射高与费用

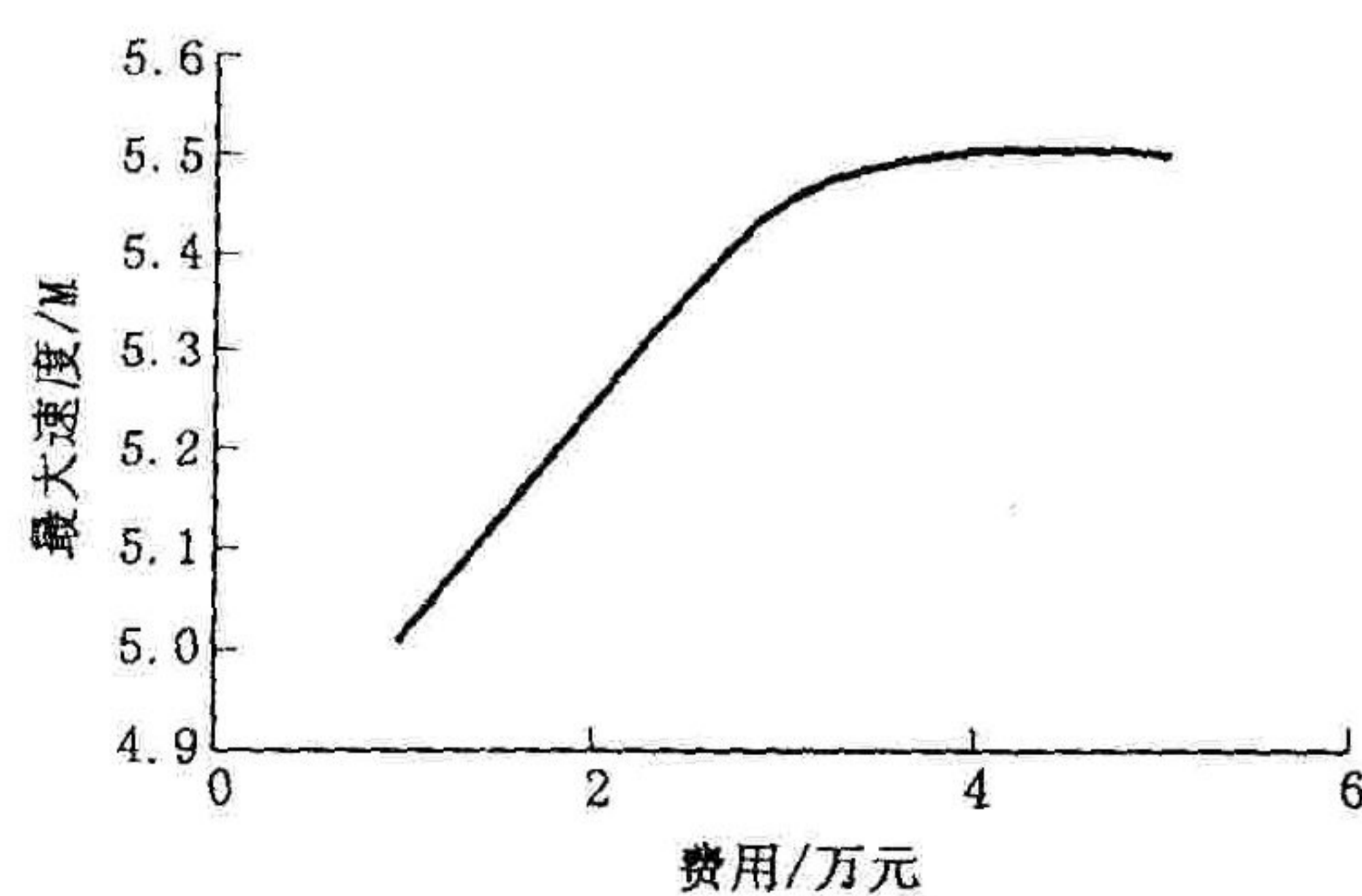


图 3 最大速度与费用

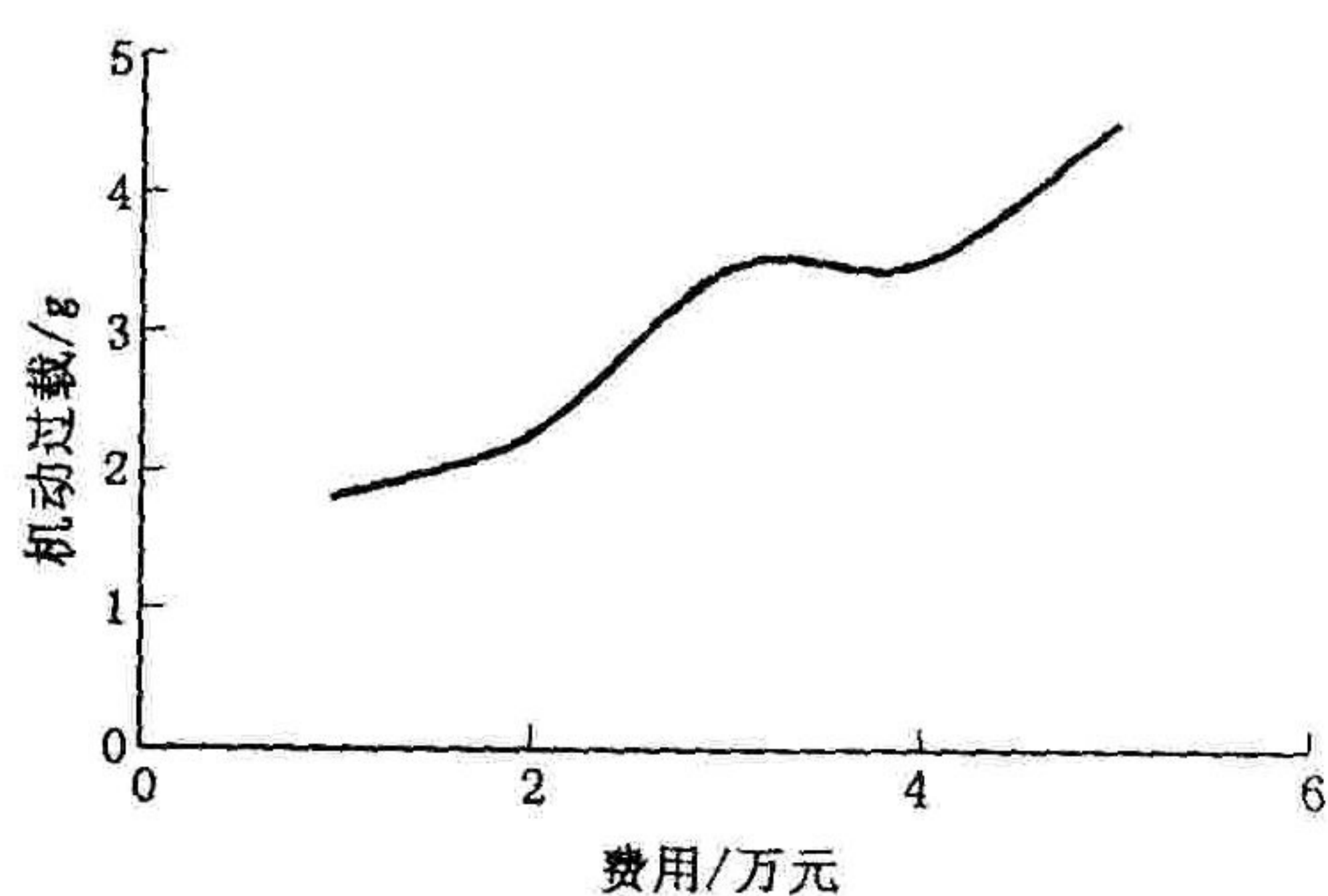


图 4 机动过载与费用

## 4 结束语

本文只是初步利用逆 DEA 模型探索防空导弹装备采办的基本规律,所用的一部分参数进行了简化,例如  $\xi$  表示输入输出是按线性关系在变化;拟合的点数偏少;没有考虑  $\Delta X^0$  的分量同时变化对采购费用会产生什么影响,当然这需要在算法上进行改进,如可以用神经网络进行大数据量并行计算,推理出输入输出之间的关系,有待进一步研究。

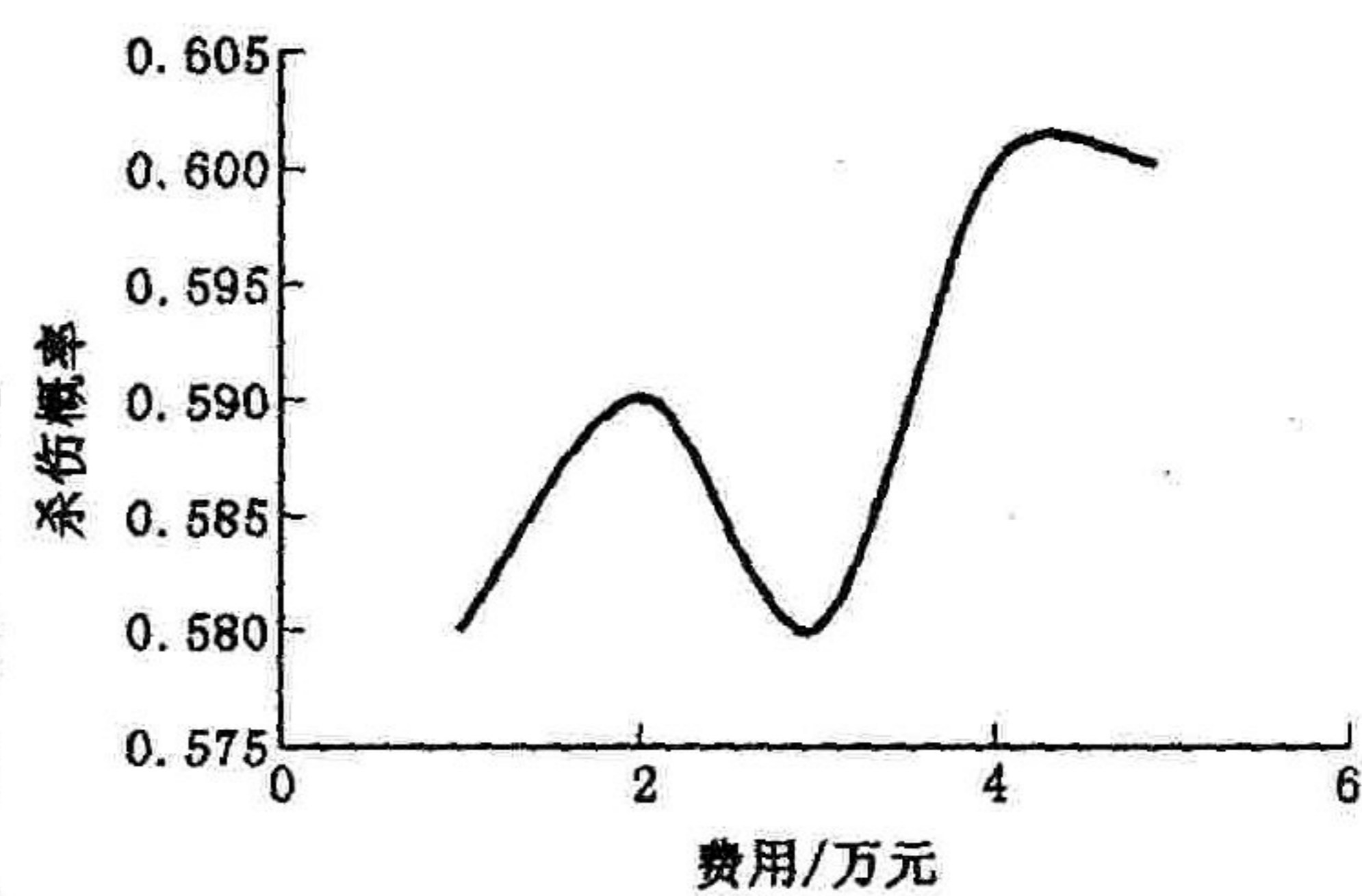


图5 杀伤概率与费用

### 参考文献:

- [1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the Efficiency of Decision Making Units[J]. European Journal of Operational Research, 1978, 2(6): 429 - 441.
- [2] 魏权龄. 评价相对有效性的 DEA 方法[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1988.
- [3] 魏权龄, 闫洪. 广义最优化理论和模型[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] 韩松. 带有随机因素的逆 DEA 模型[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 23 - 28.
- [5] 李明, 刘澎. 武器装备发展系统论证方法与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [6] 花文健, 刘宁. 基于模糊数排序的武器效能评估方法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2004, 5(5): 28 - 31.
- [7] 赵勇, 岳超源. DEA 综合模型的研究和应用[J]. 华中理工大学学报, 1996, 24(12): 83 - 85.
- [8] 李光金, 刘永清. 基于多目标规划的 DEA[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(3): 16 - 22.
- [9] 魏权龄. 输入和输出 DEA 模型中弱 DEA 有效与弱 Pareto 之间的等价性[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(10): 72 - 80.
- [10] 胡毓达. 多目标规划有效性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1994.

(编辑: 田新华)

Analysis of Ground - to - Air Missile Weapon System Acquisition Based  
on a Certain Inverse DEA Model

LI Ling - peng, LI Wei - rain, GUO Nai - lin

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: Based on variable type of air defense missile technology criteria of each country, an inverse DEA model is established and applied to missile weapon system acquisition in order to calculate the variation of the missile acquisition fee when the performance criteria value waves under unchangeable condition of effective value, which provides quantitative analysis method for weapon system acquisition.

Key words : DEA model ; efficiency ; weapon system acquisition ; multi - objective programming