数字通信中正交沃尔什函数的构造研究

张德纯, 门向生, 王兴亮
(空军工程大学电讯工程学院,陕西西安 710077)

摘 要:对沃尔什函数的构造进行了深入系统的研究,改进了用瑞得麦彻函数构造连续沃尔什函数的公式,提出了离散沃尔什函数编号与哈达马矩阵行号(或列号)之间相互转换的一整套方法,理顺了离散沃尔什函数编号与哈达马矩阵行号(或列号)之间关系,使得用哈达马矩阵的行(或列)构造的离散沃尔什函数与连续沃尔什函数建立了统一对应的关系,从而可以通过抽样来实现用连续沃尔什函数构造离散沃尔什函数。

关键词:沃尔什函数;格雷码;哈达马矩阵;细胞分裂递推法
中图分类号: TN911 **文献标识码**: A **文章编号**: 1009-3516(2005)02-0050-05

正交函数或正交码在现代数字通信的码分多路复用技术和码分多址通信系统中具有十分重要的应用价值,例如第二代数字移动通信系统 就采用了 64 bit 沃尔什(Walsh)正交码[1-2]。本文从沃尔什函数及其编号的定义开始,对沃尔什函数的构造问题进行了深入系统研究,理顺了离散沃尔什函数编号与哈达马矩阵行号(或列号)之间的关系。

1 瑞得麦彻函数和沃尔什函数

1.1 瑞得麦彻函数

1)定义

瑞得麦彻(Rademacher)函数是定义在半开区间[0,1)的方波族,每个方波有一个编号 $n(n=0,1,\cdots)$。方波幅度的取值为 +1 或 -1,规定起始时方波的取值为 +1,然后交替地在 +1 与 -1 之间变化,变化的次数(+1 变 -1 与 -1 变 +1 的次数之和,下同)$m=2^n-1$,在 +1 或 -1 上持续的时间 $T=\frac{1}{2^n}$,编号为 n 的瑞得麦彻函数用 $\mathrm{rad}(n,t)$ 表示,瑞得麦彻函数的波形如图 1 所示。

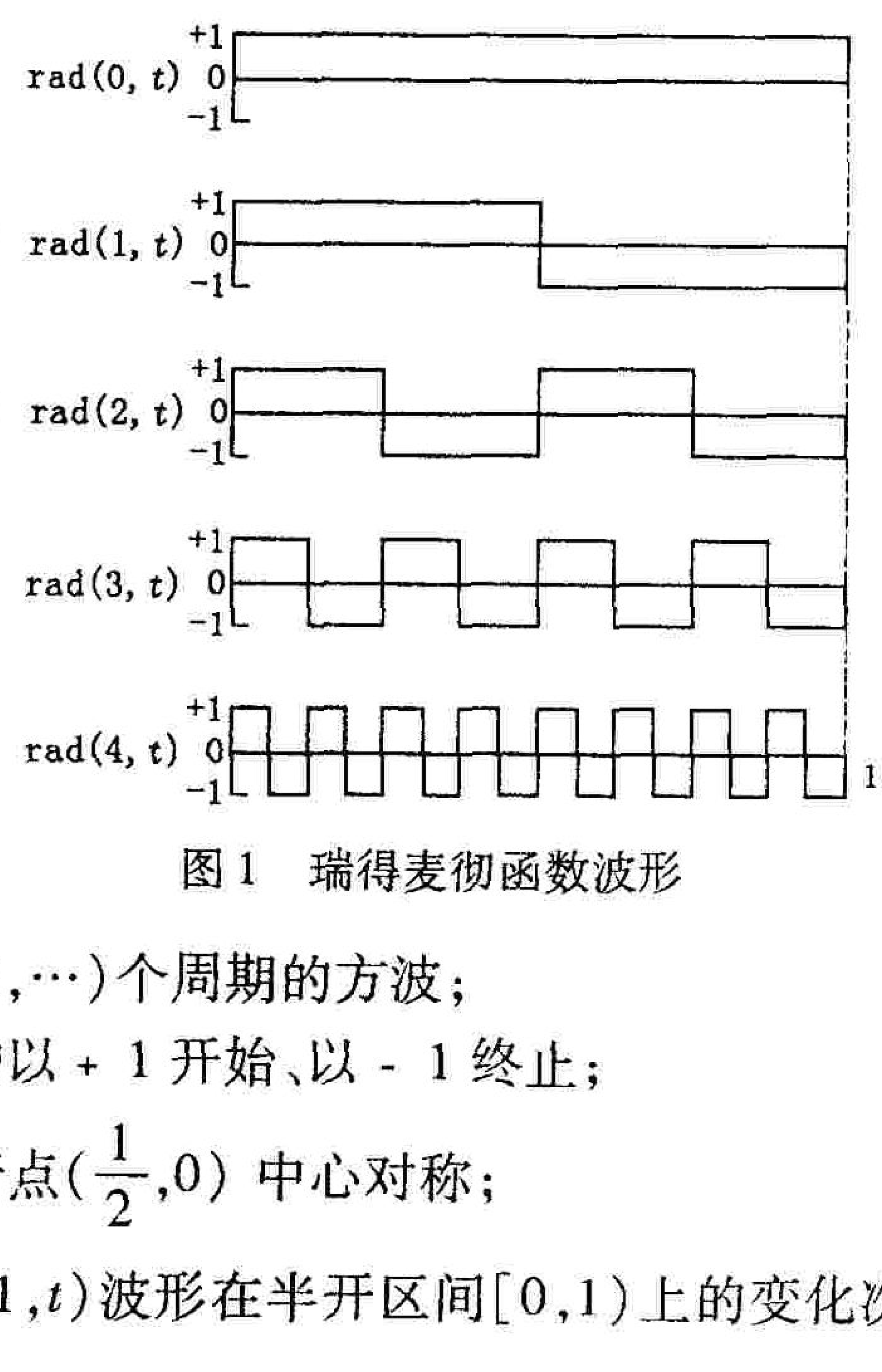

图 1 瑞得麦彻函数波形

2)波形特点

由图 1 可知瑞得麦彻函数的波形有如下特点:

①瑞得麦彻函数的波形是在半开区间[0,1)上有 $2^{n-1}(n=0,1,2,\cdots)$ 个周期的方波;

②除 $\mathrm{rad}(0,t)$ 波形以 +1 开始、以 +1 终止外,其余所有波形均以 +1 开始、以 -1 终止;

③除 $\mathrm{rad}(0,t)$ 波形关于直线 $t=\frac{1}{2}$ 轴对称外,其余所有波形关于点 $(\frac{1}{2},0)$ 中心对称;

④$\mathrm{rad}(n,t)$ 波形在半开区间[0,1)上的变化次数 m_n 与 $\mathrm{rad}(n+1,t)$ 波形在半开区间[0,1)上的变化次数 m_{n+1} 之间的关系为:$m_{n+1}=2(m_n+1)-1=2m_n+1$。

3)编号

收稿日期:2004-10-27
基金项目:军队科研基金资助项目
作者简介:张德纯(1955-),男,陕西安康人,副教授,主要从事数据通信理论与技术研究.

瑞得麦彻函数的编号 n 为方波的幅值在半开区间[0,1) 上变化的次数 m 加 1 再取以 2 为底的对数,即 $n=\log_2(m+1)$ 。

1.2 沃尔什函数

1)定义

沃尔什(Walsh)函数[3]是定义在半开区间[0,1) 的矩形波族,每个矩形波有一个编号 $n(n=0,1,\cdots)$ 。矩形波幅度的取值为 +1 或 -1,规定起始时矩形波的取值为 +1,然后在 +1 与 -1 之间变化,变化的次数 $m=n$,在 +1 或 -1 上持续的时间可以相等,也可以不相等(不相等时较长持续时间 T_1 为较短持续时间 T_s 的两倍),编号为 n 的沃尔什函数用 wal(n,t) 表示,沃尔什函数的波形如图 2 所示。

2)波形特点

由图 2 可知沃尔什函数的波形有如下特点:

①所有波形以 +1 开始,编号 n 为偶数时以 +1 终止、编号 n 为奇数时以 -1 终止;

②编号 n 为偶数的波形关于直线 $t=\frac{1}{2}$ 轴对称,编号 n 为奇数的波形关于点$(\frac{1}{2},0)$ 中心对称;

③wal(n,t)波形在半开区间[0,1)上的变化次数 m_n 与 wal$(n+1,t)$ 波形在半开区间 [0,1)上的变化次数 m_{n+1}之间的关系为:$m_{n+1}=m_n+1$ 。

3)编号

沃尔什函数的编号 n 为矩形波的幅值在半开区间 [0,1)上变化的次数 m,即 $n=m$ 。

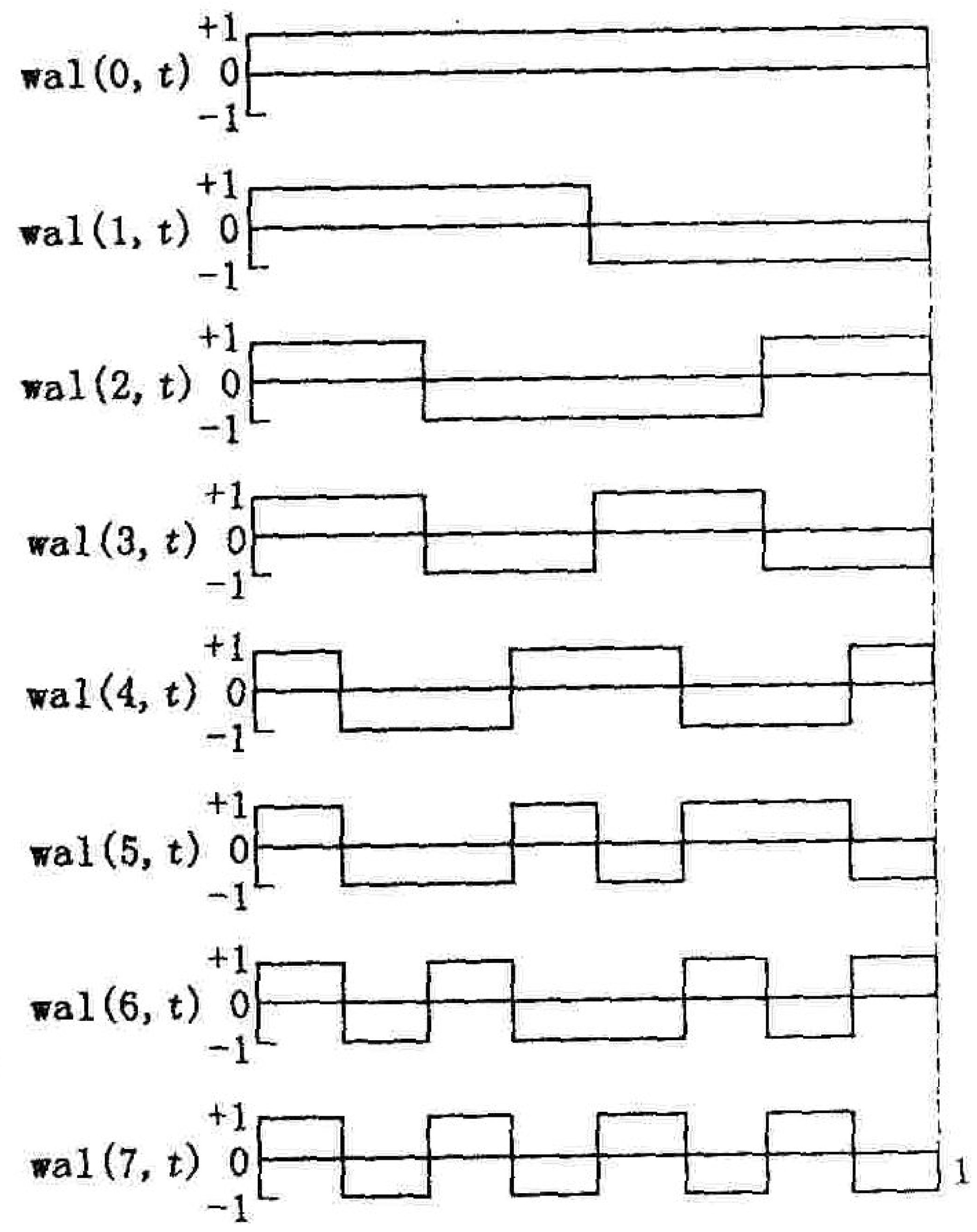

图 2　沃尔什函数波形

1.3 瑞得麦彻函数与沃尔什函数的相互关系

对比瑞得麦彻函数与沃尔什函数的波形,很容易发现 wal$(0,t)$ = rad$(0,t)$、wal$(1,t)$ = rad$(1,t)$ 、wal$(3,t)$ = rad$(2,t)$ 、wal$(7,t)$ = rad$(3,t)$ 等。如果设沃尔什函数的编号为 n、瑞得麦彻函数的编号为 n_r,当 $n=2^{n_r}-1$ 时,则有 wal(n,t) = wal$(2^{n_r}-1,t)$ = rad(n_r,t),所以沃尔什函数包含了瑞得麦彻函数。换句话说,如果把沃尔什函数看作一个集合,则瑞得麦彻函数是它的一个子集。

2　连续沃尔什函数的构造

用瑞得麦彻函数可以构造沃尔什函数。

设沃尔什函数的编号为 n ,瑞得麦彻函数的编号为 n_r,则用瑞得麦彻函数构造沃尔什函数的公式如下:

$$\mathrm{wal}(n,t)=\prod_{i=1}^{n_r}[\mathrm{rad}(i,t)]^{g_i} \tag{1}$$

式中: $n=0,1,2,\cdots$,由 $2^{n_r-1}-1<n\leqslant 2^{n_r}-1$ 确定 n_r;g_i为 n 的格雷码(Gray Code)的第 i 位(从右往左数),当 $g_i=1$ 时,$[\mathrm{rad}(i,t)]^{g_i}=\mathrm{rad}(i,t)$,当 $g_i=0$ 时, $[\mathrm{rad}(i,t)]^{g_i}=1$。$n$ 的格雷码转换过程是:先把 n 的十进制数$(n)_{10}$转换为 n 的二进制数$(n)_2=b_{n_r}\cdots b_2b_1$,再用公式 $g_i=b_{i+1}\oplus b_i(i=1\sim n_r)$ 、$b_{n_r+1}=0$ 把 n 的二进制数$(n)_2$转换为 n 的格雷码$(n)_g$。

例如用公式(1)求 wal$(13,t)$,由 $2^3-1=7<n=13\leqslant 2^4-1=15$ 确定 $n_r=4$,$(13)_{10}\Rightarrow(1101)_2=b_4b_3b_2b_1$,$g_1=b_2\oplus b_1=0\oplus 1=1$,$g_2=b_3\oplus b_2=1\oplus 0=1$,$g_3=b_4\oplus b_3=1\oplus 1=0$,$g_4=b_5\oplus b_4=0\oplus 1=1$,则有:

$$\mathrm{wal}(13,t)=\prod_{i=1}^{4}[\mathrm{rad}(i,t)]^{g_i}=\mathrm{rad}(1,t)\mathrm{rad}(2,t)\mathrm{rad}(4,t)$$

图 3 给出了用瑞得麦彻函数构造 wal$(13,t)$ 的过程。

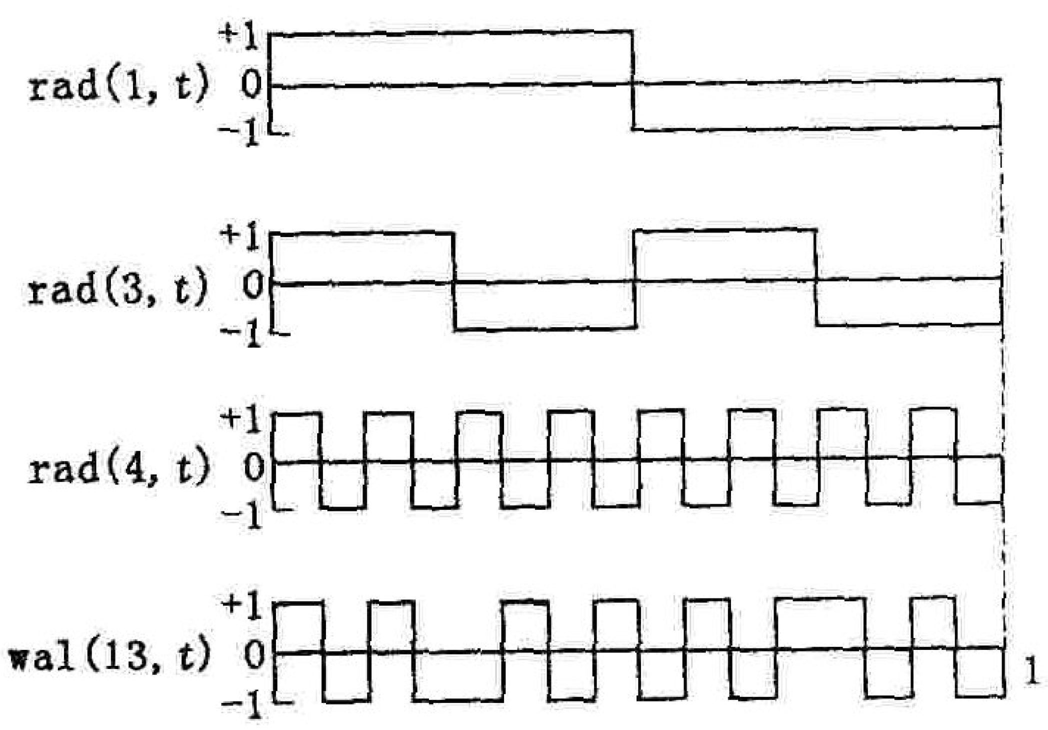

图 3　用瑞得麦彻函数构造沃尔什函数

3 离散沃尔什函数的构造

离散沃尔什函数也称沃尔什序列或沃尔什码,用 $W_N(n)$ 表示,n 为离散沃尔什函数的编号,N 为离散沃尔什函数长度(即元素或码元的个数)。两个离散沃尔什函数只有当它们的编号和长度相同时,这两个离散沃尔什函数才是相同的。

3.1 用哈达马矩阵的行(或列)构造离散沃尔什函数

用哈达马(Hadamard)矩阵的行(或列)可以构造离散沃尔什函数。

一阶哈达马矩阵为 $\boldsymbol{H}_1=[1]$

高阶哈达马矩阵的递推公式如下:

$$\boldsymbol{H}_{N_m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{N_{m-1}} & \boldsymbol{H}_{N_{m-1}}\\ \boldsymbol{H}_{N_{m-1}} & \boldsymbol{H}_{N_{m-1}}\end{bmatrix} \tag{2}$$

N_m 阶哈达马矩阵的通式可表示为

$$\boldsymbol{H}_{N_m}=\begin{bmatrix}h_{11} & \cdots & h_{1N_m}\\ \vdots & & \vdots\\ h_{N_m1} & \cdots & h_{N_mN_m}\end{bmatrix} \tag{3}$$

式(2)、(3)中:$N_m=2^m,m=1,2,\cdots$ 。

由哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的行(或列)构成离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$,其对应关系如下:

$$W_{N_m}(n)=[\boldsymbol{H}_{N_m}]_{n_h} \tag{4}$$

式中:$N_m=2^m(m=1,2,\cdots);n=0,1,\cdots,2^m-1;n_h=1,2,\cdots,2^m$

式(4)表明编号为 n 、长度为 N_m 的离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 是由哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的第 n_h 行(或列)所构成。

离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 与相应的哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 行(或列)之间的对应关系比较复杂。若设 n 为离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 的编号,n_h 为哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的某一行(或列)的行(或列)号,则两者的转换方法如下:

1)由哈达马矩阵的行(或列)号 n_h 推出离散沃尔什函数的编号 n

已知哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的第 n_h 行(或列),推出其所对应的离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 的编号 n 的过程为:①把十进制数 $(n_h-1)_{10}$ 转换为二进制数 $(n_h-1)_2$,并取二进制数的位数为 m 位($m=\log_2N_m$);②把 $(n_h-1)_2$ 倒置得 $(n_h-1)_2^{\leftharpoondown}$;③把 $(n_h-1)_2^{\leftharpoondown}$ 按格雷码译码为十进制数即得 n。

例如要确定哈达马矩阵 H_{16} 的第 6 行(或列)是编号为几的 $W_{16}(n)$,先把 $(n_h-1)_{10}=5$ 转换为二进制数 $(n_h-1)_2=0101$ ($m=\log_2N_m=\log_216=4$,所以二进制数 $(n_h-1)_2$ 的位数取 4 位),再把 $(n_h-1)_2$ 倒置得 $(n_h-1)_2^{\leftharpoondown}=1010$,最后把 $(n_h-1)_2^{\leftharpoondown}$ 按格雷码译码为十进制数得 $n=12$,即哈达马矩阵 H_{16} 的第 6 行(或列)是编号为 12 的离散沃尔什函数 $W_{16}(12)$ 。

2)由离散沃尔什函数的编号 n 推出哈达马矩阵的行(或列)号 n_h

已知离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 的编号 n ,推出其在所对应的哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的位置(第 n_h 行或第 n_h 列)的过程为:①把十进制数 $(n)_{10}$ 转换为格雷码 $(n)_g$,并取格雷码 $(n)_g$ 的位数为 m 位($m=\log_2N_m$);②把格雷码 $(n)_g$ 倒置得 $(n)_g^{\leftharpoondown}$;③把 $(n)_g^{\leftharpoondown}$ 按二进制换算为十进制数加 1 即得 n_h。

例如要确定离散沃尔什函数 $W_8(1)$ 在哈达马矩阵 H_8 的第几行,先把 $n=1$ 转换为格雷码 $(1)_g=001$($m=\log_2N_m=\log8=3$,所以格雷码 $(1)_g$ 的位数取 3 位),再把格雷码 $(1)_g$ 倒置得 $(n)_g^{\leftharpoondown}=100$,最后把 $(n)_g^{\leftharpoondown}$ 作为二进制数 $(100)_2$ 换算为十进制数加 1 得 $n_h=5$,即离散沃尔什函数 $W_8(1)$ 为哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_8$ 的第 5 行(或第 5 例)。

3)离散沃尔什函数编号 n 的递推公式

计算离散沃尔什函数编号 n 的递推公式如下[4]:

定义:在 $m=0$、$N_m=2^0=1$ 时,$n_{N_m}=n_1(1)=0$

当 $n_h=i_m$ 为奇数时:

$$n_{N_m}(i_m)=n_{N_m}(2i_{m-1}-1)=n_{N_{m-1}}(i_{m-1})\qquad i_{m-1}=1,2,\cdots,2^{m-1}\tag{5}$$

当 $n_h=i_m$ 为偶数时:

$$n_{N_m}(i_m)=n_{N_m}(2i_{m-1})=(2^m-1)-n_{N_{m-1}}(i_{m-1})\qquad i_{m-1}=1,2,\cdots,2^{m-1}\tag{6}$$

式中:$m=1,2,\cdots$；N_m 为哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的阶数(或离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 的长度)；$n_h=i_m=1,2,\cdots,2^m$ 为 N_m 阶哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的行(或列)号。

$n_{N_m}(i_m)$ 的值就是 N_m 阶哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的第 i_m 行(或列)所对应的离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 的编号 n。

在实际应用中,直接用式(5)和式(6)来计算离散沃尔什函数的编号,其递推过程仍然非常繁琐,尤其是当 m 较大时。通常是利用式(5)和式(6)构成离散沃尔什函数编号的细胞分裂递推法(如表 1 所示),来确定长度为 N_m、编号为 n 的离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 是由 N_m 阶哈达马矩阵 $\boldsymbol{H}_{N_m}$ 的第几行(或列)所构成的。例如要确定 $\mathrm{wal}_8(1)$ 和 $\mathrm{wal}_8(7)$ 是由 8 阶哈达马矩阵 H_8 的第几行所构成的,可查表 1 的"$m=3$、$N_m=2^3=8$"那一栏,该栏第一行数字表示哈达马矩阵的行号,第二行数字表示离散沃尔什函数的编号,从而查出 $\mathrm{wal}_8(1)$ 对应于 $\boldsymbol{H}_8$ 的第 5 行、$\mathrm{wal}_8(7)$ 对应于 H_8 的第 2 行。该表只列出了 $m=1,2,3,4,5$ 时 n 与 n_h 的对应关系,当 $m=6,7,8\cdots$ 时,可按下列方法递推:① m 栏中 n 和 n_h 的个数是 $m-1$ 栏中 n 和 n_h 的个数的两倍,即 $N_m=2N_{m-1}$;②任一栏中 n_h 是从小到大、从左到右按自然数规律排列;③$m-1$ 栏中的 n 一分为二对应于 m 栏中紧相邻的两个 n,对应规律如下:左对应(m 栏中 n_h 为奇数)的 n 值由式(5)确定,右对应(m 栏中 n_h 为偶数)的 n 值由式(6)确定,即 m 栏中左对应的 n 值等于 $m-1$ 栏中的 n 值,m 栏中右对应的 n 值等于 (2^m-1) 减去 $m-1$ 栏中的 n 值,或者说 m 栏中左对应的 n 值与右对应的 n 值之和等于 2^m-1。

表 1　离散沃尔什函数编号 n 的细胞分裂递推法

m	N_m	2^m-1		n 与 n_h 的对应关系
0	1	0	n_h	1
			n	0
1	2	1	n_h	1 2
			n	0 1
2	4	3	n_h	1 2 3 4
			n	0 3 1 2
3	8	7	n_h	1 2 3 4 5 6 7 8
			n	0 7 3 4 1 6 2 5
4	16	15	n_h	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
			n	0 15 7 8 3 12 4 11 1 14 6 9 2 13 5 10
5	32	31	n_h	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
			n	0 31 15 16 7 24 8 23 3 28 12 19 4 27 11 20 1 30 14 17 6 25 9 22 2 29 13 18 5 26 10 21

3.2　用连续沃尔什函数构成离散沃尔什函数

在工程上,可以通过在半开区间[0,1)上对连续沃尔什函数 $\mathrm{wal}(n,t)$ 进行等间隔抽样来得到离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$,此种方式易于用数字电路实现。具体方法是:抽样的次数 N 等于将要构成的离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 的长度 N_m,抽样的起始位置为 $\frac{1}{2N_m}$,抽样的间隔为 $\frac{1}{N_m}$,被抽样的连续沃尔什函数的最大编号 $n_{\max}=N_m-1$,从而可以得到对应的离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$。例如欲构造长度 $N_m=2^6=64$ 的离散沃尔什函数,可以通过对连续沃尔什函数 $\mathrm{wal}(0,t)\sim\mathrm{wal}(63,t)$ 中的每一个函数进行 N_m 次等间隔抽样来得到,抽样的起始位置为 $\frac{1}{128}$,抽样的间隔为 $\frac{1}{64}$。

4 结论

1)连续沃尔什函数可由瑞得麦彻函数来构造,其构造公式为式(1);

2)离散沃尔什函数可由 N_m 阶哈达马矩阵 H_{N_m} 的行(或列)来构造,也可以通过对连续沃尔什函数进行 N_m 次等间隔抽样来构造;

3)离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 与 N_m 阶哈达马矩阵 H_{N_m} 的行(或列)并不是简单地从上到下(或从左到右)一一对应的,而是有一个比较复杂的对应关系,其对应关系为式(4);

4)本文提出的离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 编号与 N_m 阶哈达马矩阵 H_{N_m} 的行号(或列号)之间的转换关系,使得不管离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$ 的长度 $N_m(=2^m, m=0,1,\cdots)$ 是多少,其编号与连续沃尔什函数的编号完全一致[5];

5)由于离散沃尔什函数的编号与连续沃尔什函数的编号完全一致,可以通过对连续沃尔什函数 $\mathrm{wal}(n, t)$ 进行 N_m 次等间隔抽样来得到离散沃尔什函数 $W_{N_m}(n)$。

参考文献:

[1] 胡　征,樊昌信. 沃尔什函数及其在通信中的应用[M].北京:人民邮电出版社,1980.
[2] 吴伟陵.移动通信中的关键技术[M].北京:北京邮电大学出版社,2000.
[3] 张其善,张凤元,吴今培.沃尔什函数的一种新定及义及其复制本质[J].通信学报,2004,25(2):144-148.
[4] 张德纯,王兴亮.现代通信理论与技术导论[M].西安:西安电子科技大学出版,2004.
[2] 周炯槃.通信原理(下)[M].北京:北京邮电大学出版社,2002.

(编辑:门向生)

A Study of the Construction of Walsh Function in Use for Modern Digital Communication

ZHANG De - chun, MEN Xiang - sheng, WANG Xing - liang
(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: A systematic and in - depth research on the construction of Walsh function are carried out. The formula of constructing continuous Walsh function with Rademacher function is improved. A complete set of mutually transforming methods between the numbers of the discrete Walsh function and the row or rank numbers of Hadamard matrix is brought up and their relationship is put in order, thus building up a unified and corresponding relationship between the discrete Walsh function which is made from the row or rank of Hadamard matrix and the continuous Walsh function and constructing the discrete Walsh function, with the way of sampling, by continuous Walsh function.

Key Words: Walsh function; Gray code; Hadamard matrix; progressive deriving method (similar to cell division)