第5卷第6期　　空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)　　Vol.5 No.6
2004年12月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Dec. 2004

磁悬浮控制系统随机平稳响应预测

姚　宏，邹　毅，李　颖
(1.空军工程大学 理学院，陕西 西安　710051)

摘　要:随机平稳响应预测是系统稳定性、可靠性分析的重要内容之一。基于累计量截断法,对低维磁悬浮控制系统随机平稳响应进行了理论分析,推导出近似解析解,对磁悬浮控制系统进一步设计、稳定控制有理论指导作用。

关键词:随机；响应；预测；磁悬浮；可靠性
中图分类号:O322　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2004)06-0084-03

磁悬浮技术是一种主动式的隔离技术,由于它具有无机械摩擦、磨损小、维修费用低、噪音小、无污染等优良特性,近年来,在很多领域得到应用,其研究理论也逐渐深入[1-2]。可是,实际上此系统处于随机的工作环境中,即存在着一些引发机械或系统结构振动的随机振源,如:地面强风中湍流、噪声、路面不平度等,这些干扰对系统实现稳定会造成严重的影响。因此,对这种系统随机平稳响应的研究,对改善此机械与结构系统在随机环境中工作的稳定性、可靠性有重要的意义。

1　矩函数微分方程法

1.1　矩函数微分方程

矩函数微分方程法,简称方程法,是预测线性与非线性系统随机统计量的一种方法。其基本思想是,首先将描述线性或非线性系统随机振动的随机微分方程、边界条件及初值转换成响应与激励的矩函数所满足的确定性微分方程、边界条件及初值,其次,在相应边界与初值下求解确定性矩方程,给出所需响应统计量。

该系统运动微分方程可化为式(1)伊藤随机微分方程[3]。其中,$\boldsymbol{Y}(t)$ 为 n 维矢量随机过程;$\boldsymbol{W}(t)$ 为 m 维矢量维纳过程,且各分量相互独立并具有单位强度;$\boldsymbol{f}(Y,t)=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{G}(Y,t)$ 为 $n\times m$ 维矩阵,f 与 $\boldsymbol{G}$ 分别称为该方程的漂移矢量与扩散矩阵。利用伊藤随机微分公式式(2),再设式(3),以 δ 表示时间增量 Δt 上的有限前向增量算子,对任意解析函数 $h(Y)$,有式(4)。其泰勒展开式为 $\delta h=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial Y_j}\delta Y_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial Y_j\partial Y_k}\delta Y_j\delta Y_k+O(\delta\boldsymbol{Y}\delta\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}})$。

$$\mathrm{d}Y(t)=f(Y,t)\mathrm{d}t+G(Y,t)\mathrm{d}W(t),Y(0)=y_0 \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\varphi(Y,t)=[\varphi_t+\varphi_Y^{\mathrm{T}}f+\frac{1}{2}tr(\varphi_{YY}GG^{\mathrm{T}})]\mathrm{d}t+\varphi_Y^{\mathrm{T}}G\mathrm{d}W(t) \tag{2}$$

$$h(Y)=Y_1^{S_1}Y_2^{S_2}\cdots,Y_n^{S_n},S_1+S_2+\cdots S_n=S \tag{3}$$

$$\delta h=h(\boldsymbol{Y}+\Delta\boldsymbol{Y})-h(\boldsymbol{Y}) \tag{4}$$

式(1)代入式(4),在 $Y(t)=y(t)$ 的条件下,对式(4)两边求期望,并略去高阶小量得

$$E[\delta h]=\sum_{j=1}^{n}E[\frac{\partial h}{\partial Y_j}f_j(Y,t)]\delta t+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}E[\frac{\partial^2 h}{\partial Y_j\partial Y_k}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})_{jk}]\delta t \tag{5}$$

两边除以 δt,得

收稿日期:2004-04-29
基金项目:空军工程大学学术基金资助(2002X09)
作者简介:姚　宏(1963-),女,吉林长春人,教授,主要从事非线性动力学及磁悬浮理论研究.

$$\frac{\mathrm{d}E[h]}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} E[\frac{\partial h}{\partial Y_j} f_j(Y,t)] + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} E[\frac{\partial^2 h}{\partial Y_j \partial Y_k}(\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}})_{jk}] \tag{6}$$

式(3) 代入式(6) 可得

$$\dot{m}_{S_1S_2\cdots\cdots S_n}(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r_j} S_j a_j^{r_1r_2\cdots r_n} m_{r_1+S_1,\cdots,r_j+S_j-1,\cdots,r_n+S_n} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{r_j} S_jS_k b_{jk}^{r_1r_2\cdots r_n} m_{r_1+S_1,\cdots,r_j+S_j-1,\cdots,r_n+S_n} \tag{7}$$

式中 $m_{S_1S_2\cdots S_n}(t) = \int_{R_n} h(y)p(y,t)\mathrm{d}y$。初值由 $Y = Y_0$ 代入 $h(y)$ 求期望得 $m_{S_1S_2\cdots S_n}(t_0) = \int_{R_n} h(y)p(y,t_0)\mathrm{d}y$。

1.2 累计量函数微分方程

将 $h(Y) = \exp(i\theta^T Y)$ 代入式(6),得式(8)特征函数所满足的微分方程[3]。利用对数特征函数与特征函数之间的关系,得式(9)对数特征函数所满足的微分方程。S 阶累计量函数的方程由式(9)按下式得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\theta,t)}{\mathrm{d}t} = iE[\boldsymbol{h\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}] - \frac{1}{2}E[\boldsymbol{h\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}] \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Psi(\theta,t)}{\mathrm{d}t} = \{iE[\boldsymbol{h\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}] - \frac{1}{2}E[\boldsymbol{h\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}]\}\exp\{-\Psi(\theta,t)\} \tag{9}$$

$$K_{S_1S_2\cdots S_n}(t) = (-1)^S \frac{\partial^S \Psi(\theta,t)}{\partial\theta_1^{S_1}\partial\theta_2^{S_2}\cdots\partial\theta_n^{S_n}}|_{\theta=0} \tag{10}$$

前 3 个累计量方程为 $\dot{K}_{Sj=1}(t) = E[f_j]$;$\dot{K}_{\substack{Sj=1\\Sk=1}}(t) = E[Y_j^0 f_k + Y_k^0 f_j] + E[\beta_{jk}]$,$\beta_{jk} = (\boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}})_{jk}$;$\dot{K}_{\substack{Sj=1\\Sk=1\\Sl=1}}(t) = E[\{Y_k^0Y_l^0 - K_{\substack{Sk=1\\Sl=1}}\}f_j + \{Y_j^0Y_l^0 - K_{\substack{Sj=1\\Sl=1}}\}f_k + \{Y_j^0Y_k^0 - K_{\substack{Sj=1\\Sk=1}}\}f_l + E[Y_j^0\beta_{kl} + Y_k^0\beta_{jl} + Y_l^0\beta_{jk}]$。初始条件可从原方程的初始条件导出。相关函数所满足的方程也可用类似的方法得到。

1.3 累计量截断

累计量截断是高斯截断的一种推广。其基本思想是,假设响应过程某阶以上的累计量函数全部为零,借助于累计量函数与矩函数之间的关系,将高于某阶的矩用等于和低于该阶的矩表出,从而将矩方程在该阶水平上截断。为应用累计量截断方案,需建立累计量函数与特征函数之间的关系导出。$E[Y_j] = k_1[Y_j]$;$E[Y_jY_k] = k_2[Y_j,Y_k] + k_1[Y_j]k_1[Y_k]$;$E[Y_jY_kY_l] = k_3[Y_j,Y_k,Y_l] + 3\{k_1[Y_j]k_2[Y_k,Y_l]\}_S + k_1[Y_j]k_1[Y_k]k_1[Y_l]$;$E[Y_jY_kY_lY_m] = k_4[Y_j,Y_k,Y_l,Y_m] + 3\{k_2[Y_j,Y_k]k_2[Y_l,Y_m]\}_S + 4\{k_1[Y_j]k_3[Y_k,Y_l,Y_m]\}_S + 6\{k_1[Y_j]k_1[Y_k]k_2[Y_l,Y_m]\}_S + k_1[Y_j]k_1[Y_k]k_1[Y_l]k_1[Y_m]$。式中 $\{\}_S$ 表示对称运算,即取类似于括号中项的所有可置换项的平均。

2　磁悬浮控制系统随机响应

2.1 系统模型

设一个磁悬浮控制系统,根据其动态特性,只考虑水平方向,且采用电流控制时,其力学模型为[4]

$$m\ddot{y} + c_{11}\dot{y} = F = \frac{\mu_0 n^2 S}{4}\left[\left(\frac{I_0 - i}{d - y}\right)^2 + \left(\frac{I_0 + i}{d + y}\right)^2\right] \tag{11}$$

式中:m 为质量,c_{11} 为阻尼系数,μ_0 为真空磁导率,n 为线圈匝数,S 为磁极面积。I_0 为偏置电流,d 为标准间隙。i 为由位移引起的控制电流。线圈的控制电压由线性控制律决定 $U = k_p x_1 + k_d \dot{x}_1$。由于磁力为一个非线性函数,展开并略去高阶小量后,近似有 $F = k_1 y - k_2 y^3$。则系统的动力学模型见式(12)。式中:$a = (k_1 - k_p)/m$,$c = (c_{11} + k_d)/m$,$b = k_2/m$ 。

$$\ddot{y} = ay - c\dot{y} - by^3 \tag{12}$$

2.2 随机平稳响应

下面讨论系统(12)对高斯白噪声的响应,其运动微分方程为 $\ddot{y} = ay - c\dot{y} - by^3 + \xi(t)$。式中 $\xi(t)$ 为高斯白噪声,均值为零。令 $y = y_1$,$\dot{y} = y_2$,有

$$\dot{y}_1 = y_2; \qquad \dot{y}_2 = ay_1 - cy_2 - by_1^3 + \xi(t) \tag{13}$$

根据上述方法,得系统(13)前四阶矩方程:$\mathrm{d}E[y_1] = E[y_2]\mathrm{d}t$;$\mathrm{d}E[y_2] = (aE[y_1] - cE[y_2] - bE[y_1^3])\mathrm{d}t$;$\mathrm{d}E[y_1^2] = 2E[y_1y_2]\mathrm{d}t$;$\mathrm{d}E[y_1y_2] = (E[y_2^2] + aE[y_1^2] - cE[y_1y_2] - bE[y_1^4])\mathrm{d}t$;$\mathrm{d}E[y_2^2] = (2aE[y_1y_2] -$

$2cE[y_2^2]-bE[y_1^3y_2]+2c)\mathrm{d}t$;$\mathrm{d}E[y_1^3]=3E[y_1^2y_2]$;$\mathrm{d}E[Y_1^4]=4E[Y_1^3Y_2]$;$\mathrm{d}E[Y_1^3Y_2]=3E[Y_2^2Y_1^2]+aE[Y_1^4]-cE[Y_1^3Y_2]-bE[Y_1^6]$;$\mathrm{d}E[Y_1^2Y_2^2]=2E[Y_1Y_2^3]+2aE[Y_1^3Y_2^2]-2cE[Y_1^2Y_2^2]-2bE[Y_1^5Y_2]+2cE[Y_1^2]$;$\mathrm{d}E[Y_1Y_2^3]=E[Y_2^4]+3aE[Y_1^2Y_2^2]-3cE[Y_1Y_2^3]-3bE[Y_2^2Y_1^4]+6cE[Y_1Y_2]$。

对于平稳响应,矩的导数全为零,且 $n\geqslant 3$,$k_n=0$,得

$$E[y_2]=0,E[y_1]=0,E[y_1^3]=0E[y_1^4]=3(E[y_1^2])^2,E[y_1^3y_2]=3E[y_1^2]E[y_1y_2] \tag{14}$$

将式(14)代入系统(13)前四阶矩方程,得 $E[y_2^2]=0,E[y_1y_2]=0,E[y_1^2]=\frac{a+\sqrt{a^2+12b}}{6b}$。

这样,便获得了磁悬浮控制系统对高斯白噪声激励的忽略三阶以上累计量的平稳响应;同理,可获得忽略四阶累计量的平稳响应,首先,记 $V=E[Y_1^2]$,令高于四阶累计量为零,即 $n\geqslant 4$,$k_n=0$,可得 V 的方程为 $(900b^2a^2+45a^4b)V^3-(180a^3b-3a^3)V^2+9a^4V+40bc^2=0$。

由图 1 可见,选择不同的截断阶数,得到不同的平稳位移响应方差,但是上述两者相差并不大,基本能满足工程实际要求。

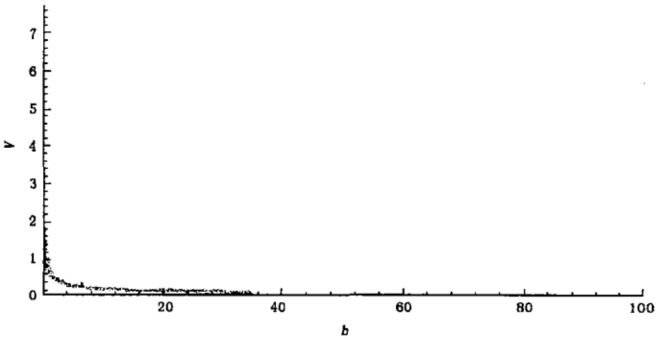

图 1 平稳位移响应方差

3 结束语

非线性磁悬浮控制系统由于存在随机激励,并且其振幅往往没有一定的限制,大幅度的响应是有可能出现的,虽然它出现的可能很小,但是它与结构的破坏息息相关,而非线性效应正是在这些大幅度响应中起决定作用的。因此,研究非线性磁悬浮控制系统的随机振动,预测它的随机响应,具有十分重要的意义。本文通过对磁悬浮控制系统动态特性的分析,建立其非线性模型,基于累计量截断法对其随机平稳响应进行了理论分析,给出了近似解析解。这为对系统可靠性、稳定性、稳定控制的进一步分析提供了有效的根据。

参考文献:

[1] 王洪礼,吴志强. 磁力轴承参数对转子运动稳定性的影响[J]. 应用数学和力学,1994,15(4):326-327.

[2] Staoh Ichiju. Oswakdi Strik of Radial Axis Motion and Stiffness[J]. JSME International Journal Series 2,1990, 33(1):18-26.

[3] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京:科学技术出版社,1998.

[4] Yao hong, Xu Jianxue. The Research on Dynamical Behavior and Design about Control Parameters for Nonlinear Magnetic Control System[J]. Chinese Journal of Aeronautics,1999 ,12(1):25-29.

(编辑:姚树峰)

Response Prediction of Magnetic Levitation Control System to Random Excitation

YAO Hong, ZOU Yi, LI Ying

(College of Science, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: The research on response to random excitation is the key to the analysis of stability and reliability. Based on the method of cumulate - neglect closure, the response of magnetic levitation control system to random excitation is discussed in theory, the approximate solutions are obtained. It is of great theoretic importance to improving the design and realizing the stable control for the system.

Key words: random; response; prediction; magnetic levitation; reliability

(本卷终)