

Turbo 码最优周期交织器的设计

达新宇¹, 孙宁宁², 闫大勇²

(1. 西北工业大学, 陕西 西安 710072; 2. 空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

摘要:从码重分布的角度分析了影响 Turbo 码性能的原因,介绍了 Turbo 码最优周期交织器的概念,为 Turbo 码提供了一种新的交织器设计方法。经实验验证,用提出的方法所设计的交织器具有较好的性能,易于实现。

关键词:Turbo 码;交织器;码重;误码率

中图分类号:TN911.22 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2004)05-0067-05

自从 C. Berrou 等人在 1993 年的国际通信会议 (ICC 93) 上提出了并行级联卷积码 (PCCC) 即 Turbo 码,并公布了其模拟结果与 1/2 码率的香农限 ($E_b/N_0 = 0$ dB) 仅差 0.7 dB 以后,这一优异性能立即在编码领域引起轰动,掀起了研究 Turbo 码的热潮^[1]。Turbo 码的性能由码结构、最小距离及距离谱等诸多因素决定,在计算误比特率 BER 而非计算误码字率、误序列(差错事件)概率时,还与码字中包含的信息比特数有关。此外,交织器的选择、迭代译码的算法对 Turbo 码的性能也是至关重要的。其中,交织器的交织方式对 Turbo 码的性能影响尤其大,因此,交织方式的选择直接关系着 Turbo 码性能的优劣。本文从阐述 Turbo 码的编译码原理着手,探讨交织器设计的一些基本原则、新的设计方案和实用性结论。

1 Turbo 码的编译码原理

1.1 Turbo 码编码器

Turbo 码是在汲取传统级联码优点基础上的一种改进,它的编码器采用并行级联(PC)结构,如图 1 所示^[2]。

输入信息流 $m = d_k$ 并行分为 3 支,分别处理后得到信息码 x_k 、删余后的校验码 y'_{1k} 和 y'_{2k} ,再通过复合器合成一个信息流发送出去。第一支是系统码的信息 $m = d_k$ 直通通道,为了与下面两支信息在时间上匹配,要加上一个延时。第二支经

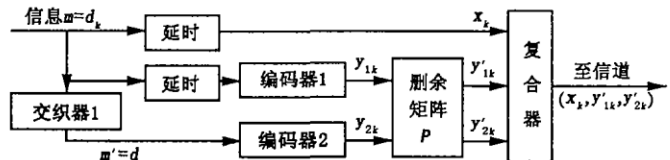


图 1 Turbo 码并行级联编码器

延时、编码、删余处理后送入复合器,编码方式大多是卷积码和分组码。第三支经交织、编码、删余处理后送入复合器。交织的目的是将信息码随机化,即为了改变码重分布,如果交织前 d_k 对应一个轻码,期望交织后的 d_k 能对应一个重码。由于 Turbo 码采用 2 个编码器的校验比特,产生的冗余比特比一般情况多一倍,于是按一定规律轮流选用两个编码器的校验比特。删余矩阵的作用是通过删除冗余的校验位来调整码率。

1.2 Turbo 码译码器

Turbo 码译码器采用反馈结构,以迭代方式译码。与 Turbo 码编码结构中有 2 个编码器相对应,译码端也应该有 2 个分量译码器,两者的连接方式可以是并行级联,也可以是串行级联,并行级联译码器结构如图 2 所示。

收稿日期:2004-05-14

基金项目:军队装备基金资助项目(51421010103jb3201)

作者简介:达新宇(1961-),男,陕西宝鸡人,副教授,博士生,主要从事软件无线电技术研究。

进入 DEC₁ 的是 x_k 及 y_{1k}, 其中 x_k = m = d_k。进入 DEC₂ 的是 y_{2k} 及交织后的 x_k (即 m' = d_n)。校验码 y_{1k} 和 y_{2k} 虽然是由 2 个编码器独立产生并分别传输的, 但它们同源, 均取决于信息码 m。因此可以合理推论, 一个译码器可利用另一个译码器的软输出提供的附加信息进行译码, 然后将自己的软输出作为附加信息反馈回另一个译码器, 整个译码过程可以看作是 2 个子译码器一次次的信息交换与迭代译码, 类似于涡轮机的工作原理, Turbo 码也由此得名。

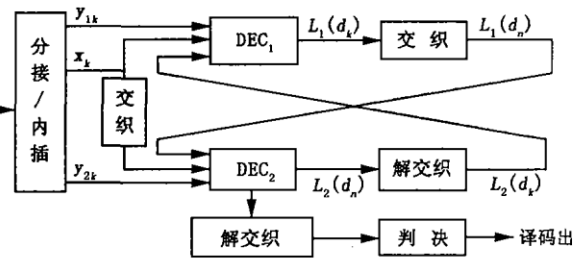


图2 Turbo 码并行级联译码器

串行译码与并行译码的原理相同, 只是 DEC₁ 和 DEC₂ 并非同时开始译码, 而是先由 DEC₁ 译码, 待 DEC₁ 的软输出交织后, DEC₂ 才开始译码。DEC₂ 的软输出解交织后形成外信息, 返送给 DEC₁。DEC₁ 的软输出交织后又送入 DEC₂。如此串联循环, 直到信息量用尽, 迭代结束, 最终硬判决译码输出。其结构如图 3 所示。

1.3 Turbo 码译码算法

常见的软输入、软输出 (SISO) 算法有标准 MAP 算法、对数 MAP 算法、最大值算法以及软输出维特比译码 (SOVA), 其中标准 MAP 算法比其他几种算法略胜一筹。

下面以 1/2 码率的递归卷积码 (RSC) 通过 BPSK 调制的 AWGN 信道为例对这一简化算法作简要描述。

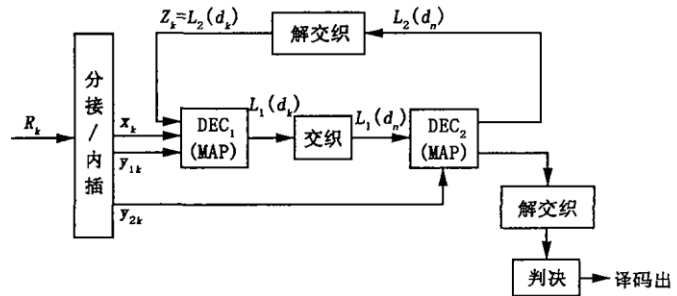


图3 Turbo 码串行级联译码器

在发送端, 假设有一长度为 N 的信息序列 {d_k}, d_k = 0, 1, 其中最后 ν (编码约束长度) 位用作编码器状态迫零, 经编码送入信道的码序列为 C₁^N = (C₁, C₂, ..., C_k, ..., C_N), 其中 C_k = (2d_k - 1, 2y_k - 1)。在接收端, 离散无记忆高斯信道对应的输出序列为 R₁^N = (R₁, R₂, ..., R_k, ..., R_N), 其中 R_k = (2d_k - 1 + p_k, 2d_k - 1 + q_k), p_k 和 q_k 是 2 个相互独立的且均值为 0、方差为 σ² 的高斯随机变量。如果定义各信息位 d_k 的对数似然比为

$$L(d_k) = \log[Pr(d_k = 1/R_1^N) / Pr(d_k = 0/R_1^N)] \tag{1}$$

其中 Pr(d_k = i/R₁^N) 是信息位 k 的最大后验概率 APP (i = 0 或 1), 根据这一软输出即可得到 d_k 的硬判决结果:

$$L(d_k) \geq 0 \rightarrow d_k = 1, L(d_k) < 0 \rightarrow d_k = 0$$

令 λ_kⁱ(m) = Pr(d_k = i, S_k = m/R₁^N), 其中 S_k 为编码器状态。则式(1)可改写为

$$L(d_k) = \log[\sum_{m=1}^{2^v-1} \lambda_k^1(m) / \sum_{m=0}^{2^v-1} \lambda_k^0(m)] \tag{2}$$

再定义 2 个迭代算子: α_kⁱ(m) = Pr(d_k = i, S_k = m, R₁^k); β_kⁱ(m) = Pr(R_{k=1}^N / d_k = i, S_k = m), 式(2)可进一步简化为

$$L(d_k) = \log[\sum_m \alpha_k^1(m) \beta_k^1(m) / \sum_m \alpha_k^0(m) \beta_k^0(m)] \tag{3}$$

而 α_kⁱ(m) 和 β_kⁱ(m) 可用如下迭代求得:

$$\alpha_k^i(m) = \delta_i(R_k, m) \sum_{j=0}^1 \alpha_{k-1}^j(S_b^j(m))$$

$$\delta_i(R_k, m) = \exp[\frac{2}{\sigma^2} (x_k i + y_k \gamma_k^i(m))]$$

$$\beta_k^i(m) = \sum_{j=0}^1 \beta_{k+1}^j(S_f^j(m)) \delta_j(R_{k+1}, S_f^j(m))$$

其中, S_b^j(m) 是当输入为 j 导致编码器状态为 m 的前一个状态; S_f^j(m) 是当编码器状态为 m、输入为 i 时编码器次状态; γ_kⁱ(m) 是状态为 m、输入为 i 时的编码输出。

2 Turbo 码最优周期交织器设计

2.1 Turbo 码交织器的设计原则

与信道传输时加交织以均化噪声、化突发差错为随机差错的目的有所区别, Turbo 码的交织是为了防止信息的不良反馈;换一种角度,是为了让轻码交织成重码(谱窄化),让不可纠差错模式变为可纠模式(噪声均化),也就是说,其主要作用是对输入信息序列的比特顺序进行重置,使交织前后的序列相关性减小。好的交织器能把低重量的输入序列中连续“1”的比特分散,当信息序列经第一个编码器编码后得到的校验码重较低时,交织器能使信息序列在交织后进入第二个编码器编码后输出的校验码有较高码重,从而保证总的编码输出码重^[3-4]。

2.2 最优周期交织器的设计原理

图4给出了1/3速率的 Turbo 码编码电路,有2个相同的反馈卷积码 RCC (Recursive Convolutional Code) 编码电路。RCC 的转移函数可以用 $G(D) = F(D)/B(D)$ 来表示,其中 $F(D)$ 是前馈多项式, $B(D)$ 是反馈多项式。用 (g_1, g_2) 来表示反馈卷积码,其中 g_1 和 g_2 分别是反馈多项式及前馈多项式的八进制表示。满足 $Q(D) = 1 + D^r$ 是 $B(D)$ 的倍数这一条件的最小正整数 r 被定义为 RCC 的脉冲响应周期。

$m^n = m_0 m_1 \dots m_{n-1}$ 表示一个长为 n 的输入信息序列,定义其 D 变换为 $M(D) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i D^i$, $M(D)$ 为信息多项式。 m^n 经交织后得到序列 $v^n = v_0 v_1 \dots v_{n-1}$, 交织器实质上就是一个置换矩阵 $P = [P_{ij}]$, $0 \leq i, j \leq n-1$, 使得 $V = MP$, 其中 V 和 M 是对应于 v^n 和 m^n 的 n 维矢量。为简单起见,可以把交织器表示为一个整数序列: $p_j = \sum_{k=0}^{n-1} k p_{kj}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$)。

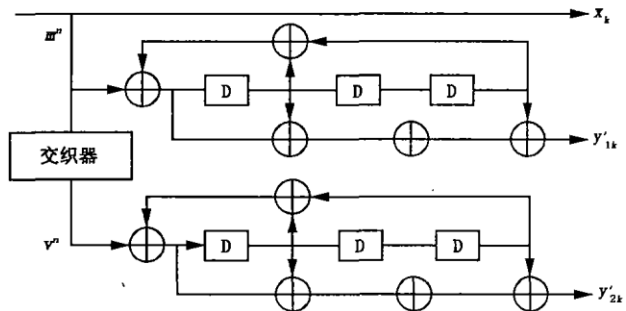


图4 由两个反馈卷积码组成的 Turbo 码

当1个输入二进制序列的 D 变换 $M(D)$ 可以被反馈多项式 $B(D)$ 整除时, RCC 的状态寄存器将在这一序列的最后一个“1”到来后回到零状态,定义这样的二进制序列为可分序列,其 D 变换为可分多项式。如果可分信息序列第一个“1”与最后一个“1”相隔的距离较小时, RCC 将会输出低权重码字。例如,对于(13, 17)码,反馈多项式 $B(D) = D^3 + D + 1$, 如果所输入的二进制信息序列为 0110100, 则信息多项式 $M(D) = D^4 + D^2 + D$, $M(D)$ 可以被 $B(D)$ 整除, RCC 编码器将会在最后1个“1”到来时回到零状态, RCC 所产生的校验序列的重量为4。

Turbo 码交织器的作用在于对在第一个 RCC 产生低权重输出的信息序列进行调整,使之可以在另一个 RCC 产生较高的权重输出。因此, Turbo 码交织器的设计要遵循以下原则:有效打乱信息序列,使得至少一个编码器的输入序列不是可分序列。在实际应用中,交织器的长度通常大于100,直接设计一个满足上述原则的交织器是物理不可实现的。因此,可以提出如下设想:使 Turbo 码交织器和每帧信息序列的长度均等于 RCC 的脉冲响应周期 L , 在这样1个周期上寻找1个最大程度满足上述原则的最优交织器,然后把这一长度为 L 的最优交织器合理的加以扩展,设计出实际的 Turbo 码交织器。

假定 Turbo 码的反馈多项式周期为 L , 如果存在一个长为 L 的交织器,该交织器可以把所有长为 L 的可分序列(全“1”和全“0”序列除外)转变为不可分序列,则称该交织器为 Turbo 码的最优周期交织器。

设 RCC 寄存器长为3,由于用做 Turbo 码的 RCC 反馈多项式 $B(D)$ 为本原多项式,所以 RCC 的传输函数的脉冲响应周期 $L = 2^3 - 1 = 7$, 接下来考察在 RCC 的一个脉冲响应周期内,信息多项式 $M(D)$ 整除反馈多项式 $B(D)$ 的各种情况。设信息序列的重量为 w , 其值在1到信息序列长度 L 之间变化。

1) 当 $w = 1$ 时:

对于反馈卷积码,当输入序列重量为1时, $M(D)$ 不可能被 $B(D)$ 整除。

2) 当 $w = 2$ 时:

设 $M(D) = D^s + D^t = D^t(D^{s-t} + 1)$, $s > t$ 且 $s - t < L$ 。由于 $B(D)$ 为本原多项式,所以当 $s - t < L$ 时, $D^{s-t} + 1$ 和 D^t 都不能被 $B(D)$ 整除。因而在此条件下 $M(D)$ 不能被 $B(D)$ 整除。

3) 当 $w=3$ 时:

仅当 $M(D)$ 等于 $B(D)$ 或 $B(D)$ 的移位时, $M(D)$ 才能被 $B(D)$ 整除。例: $B(D) = D^3 + D + 1$, 则当 $M(D)$ 为下列形式之一时才能被 $B(D)$ 整除: $D^3 + D + 1$ 、 $D^4 + D^2 + D$ 、 $D^5 + D^3 + D^2$ 、 $D^6 + D^4 + D^3$ 、 $D^5 + D^4 + 1$ 、 $D^6 + D^5 + D$ 、 $D^6 + D^2 + 1$ 。若 $I(D)$ 是输入信息序列 m^n 交织之后的 D 变换, Turbo 码的 RCC 寄存器长度为 3, 则存在长度为 L 的交织器, 使对于任意长度为 L 且重量为 3 的信息序列, 可以避免 m^n 本身的 D 变换和交织后的 D 变换同时被反馈多项式整除。

4) 当 $w=4$ 时:

对于 Turbo 编码器而言, 若其 RCC 的脉冲响应周期为 L , 则对长为 L 的二进制序列进行交织, 经验证有下列结论成立: 如果一个交织器能够避免重量为 w 的信息序列在交织前后均为可分序列, 那么该交织器也能避免重量为 $L-w$ 的信息序列在交织前后同时是可分序列。

该结论可通过如下证明:

证明: 假设上述结论不成立, 那么至少有一个重量为 $L-w$ 的信息序列 a_1^n 在交织前后均为可分序列。设该序列的 D 变换为 $A_1(D)$, 交织后该序列为 a_2^n , 相应的 D 变换为 $A_2(D)$, 则 $A_1(D)$ 和 $A_2(D)$ 均可被反馈多项式 $B(D)$ 整除。

对 a_1^n 各位取反得到 c_1^n , 则 c_1^n 的 D 变换为: $C_1(D) = D^{L-1} + D^{L-2} + \dots + 1 - A_1(D)$, 由于 $D^{L-1} + D^{L-2} + \dots + 1$ 和 $A_1(D)$ 均可被 $B(D)$ 整除, 所以 c_1^n 是可分序列。

设 c_1^n 交织之后为 c_2^n , 注意 c_2^n 恰好是 a_2^n 各位取反的结果, 从而: $C_2(D) = D^{L-1} + D^{L-2} + \dots + 1 - A_2(D)$, 由于 $D^{L-1} + D^{L-2} + \dots + 1$ 和 $A_2(D)$ 均可被 $B(D)$ 整除, 所以 c_2^n 交织之后的序列 c_2^n 也是可分序列。

可见 c_1^n 在交织前后均为可分序列, 由于该序列重量为 w , 与题设相矛盾, 所以定理成立。

根据上述结论, 对于 RCC 寄存器长度为 3 的 Turbo 码 ($L=7$), 如果一个交织器可以使得重量为 3 的信息序列在交织前后不同时为可分序列, 那么该交织器也可以使得重量为 4 的信息序列在交织前后不同时为可分序列。

5) 当 $w=5$ 或 6 时:

根据 4) 中结论, 由于重量为 1 和 2 的信息多项式都不能被反馈多项式整除, 所以对于长为 7 的信息序列, 重量为 6 和 5 的信息多项式也不被反馈多项式整除。

6) 当 $w=7$ 时:

此时 $M(D) = D^{L-1} + D^{L-2} + \dots + 1$, 且 $L=2^N-1$, 所以 $M(D)$ 一定可以被 m 次本原多项式 $B(D)$ 整除。

综上所述, 对于 RCC 寄存器长度为 3 的 Turbo 码, 如果一个交织器可以使得重量为 3、在交织前后均可被 RCC 反馈多项式整除的信息序列个数取得最小值, 那么该交织器就是最优周期交织器。例如, 对于 (13, 17) RCC 编码器所构成的 Turbo 码, $\rho^n = 4, 1, 5, 6, 0, 2, 3$ 就是一个最优周期交织器, 因为只有全“1”序列在交织前后才同时是可分序列, 它确保了在 Turbo 码 RCC 一个脉冲响应周期 L 内, 重量为 1, 2, \dots , $L-1$ 的信息多项式在交织前后不能同时被整除。

2.3 Turbo 码最优周期交织器的设计步骤

假定要设计的交织器长度为 N , 设最优交织器为 $e[0], e[1], \dots, e[L-1]$, 则交织器设计步骤如下:

1) 将整个交织器顺序划分为 $R = N/L$ 组, 每组中有 L 个元素, 则第 k 组 ($0 \leq k < N/L$) 中 L 个元素分别为: $kL, kL+1, \dots, kL+(L-1)$;

2) 将每组中的元素基于最优交织器重新排序, 这样第 k 组中的元素依次成为: $kL + e[0], kL + e[1], \dots, kL + e[L-1]$;

3) 为了防止连续突发性错误, 应用 Duncombe 和 Piper 所提供的方法尽可能把各组的次序打乱^[5], 将所得到的最优组序存于 $r[i]$ 中;

4) 按照下列方法得到 $f[i]$:

```
For i = 0 to R - 1 do
  For j = 0 to L - 1 do
     $f[iL + j] = r[i]L + e[j]$ ;
```

5) 对 $f[j]$ 做如下调整, 得到最优周期交织器 $\rho[j]$:

```
For j = 0 to L - 1 do
```

For $i=0$ to $R-1$ do

$$\rho[iR+j] = f[iL + (j+iR)_{\text{Mod}(L)}]。$$

根据以上算法,即可完成对帧长 105、采用(13,17)RCC 的 1/3 Turbo 码最优周期交织器的设计。

2.4 仿真结果

图 5 描绘了采用分组交织器、随机交织器及最优周期交织器的 Turbo 码在高斯白噪声信道中进行仿真时的性能曲线,从该图中可以看出,在误码率为 10^{-5} 时,采用最优周期交织器与常用交织器相比,信噪比可以减少 0.5 dB;在输入信噪比为 3.5 dB 时,采用最优周期交织器的误码率比常用交织器的误码率可以下降一个数量级。

由此可以看出,采用最优周期交织器后对 Turbo 码性能有了较大的改善,而且随着信噪比的增大,这种改善更为显著。

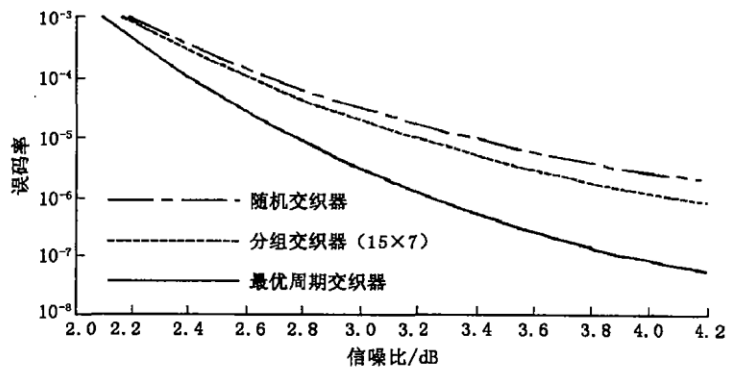


图 5 采用不同交织器的 Turbo 码误码率比较

参考文献:

- [1] Berrou C, Glavieux A. Near Optimum Error Correcting Coding and Decoding: Turbo - Codes [J]. IEEE Transaction on Communications, 1996, 44(10): 1261 - 1271.
- [2] 张宗橙. 纠错编码原理和应用 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [3] Perez C, Seghers J. A Distance Spectrum Interpretation of Turbo Codes [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42(6): 1698 - 1709.
- [4] Dolinar S, Divsalar D. Weight Distributions for Turbo Codes Using Random and Nonrandom Permutations [R]. TDA Progress Rep, 1995, 42(122): 56 - 65.
- [5] Dunscombe E, Piper F C. Optimal Interleaving Scheme for Convolutional Coding [J]. Electron Lett, 1989, 25: 2217 - 1518.

(编辑: 门向生)

The Design of Optimal Periods Interleaving Implement for Turbo Codes

DA Xin - yu¹, SUN Ning - ning², YAN Da - yong²

(1. Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China; 2. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: From the point of view of the distribution of code weight, the factors affecting the quality of Turbo codes are analyzed, the concepts of optimal periods interleaving implement for Turbo codes are introduced, and a new design of interleaving implement for Turbo codes is provided. The experiment proves that the interleaving implement designed by using the proposed method has better functions and can be easily realized.

Key words: convoluted codes; Turbo codes; interleaving implement; code weight; rate of code error