带正态误差的门限观测器

陈必红
(深圳大学 理学院数学系，深圳 518060)

摘　要:利用观测过程的基本理论，分析带正态误差的门限观测器的后验分布，并分析了当用两个门限观测器进行观测产生收缩时的后验分布情况，由此给出模数转换器的误差估计。

关键词:正态误差;门限观测器;A/D 误差估计
中图分类号:O212.8　**文献标识码**:A　**文章编号**:1009-3516(2004)04-0091-04

文献[1]给出了没有误差的门限观测器的数学模型。其中观测主体要观测的量为一随机变量 X，称之为观测客体，观察客体无法直接被观测主体观测到。将 X 的样本送人门限为 x_0 的门限观测器，其输出值 Y 也是一随机变量，是我们能够观测到的值。当 X 取值小于 x_0 时，Y 值取0值，反之 Y 值取1值。文献[1]中指出，当观测主体得到 $Y=0$ 条件下，对于 X 的后验分布为在$[-\infty, x_0)$上的广义均匀分布，而在 $Y=1$ 条件下，后验分布为在$[x_0+\infty)$上的广义均匀分布。因此，在只用一个门限观测器观测一次的情况下，是无法对观测客体 X 做任何估计的，只能够获得后验分布。而观测过程的理论则是，反对任何检测和估计的动作，只要获得知识函数，即观测客体的后验分布即可。任何决策应当根据知识函数来进行，而不是根据估计来进行[2]。另一方面，如果用两个门限观测器对同一观测客体进行观测，则知识函数有可能收缩，即后验概率函数在某一区间内均匀分布。这时,按传统的估计理论也是能够做出最大后验估计或最小均方估计的。

例如，假设 X 是一待测电压，用一门限为5 V的门限观测器进行观测，发现 X 大于5 V，这时观测主体关于 X 的后验分布为在5 V到无穷大间均匀分布。如果再用门限为6 V的门限观测器进行观测，发现 X 小于6 V，则两次观测后的知识函数收缩为在5 V和6 V之间均匀分布，并可以给出最小均方估计为5.5 V。实际上,现在的数模转换装置都是这样工作的，即通过一系列的门限观测器将被测量锁定在一个很小的范围内。因此，门限观测器的用途实际上是很广泛的。

本文将进一步分析，当门限值为一零均值正态分布的随机变量的情况下，观测主体对观测客体的知识函数的变化。

1　门限值为正态分布的随机变量的分析

在测量开始前观测主体对数学期望 X 一无所知，则开始的 X 先验概率分布为广义均匀分布[1]，注意文献[2~4]中反复强调的观点，这里的随机性是依观测主体而存在的，是主观概率而非客观概率。则 X 的先验概率密度函数为

$$f_X(x)=\varepsilon \tag{1}$$

其中 ε 为整个实数轴长度 δ 的倒数，是一个大于0却小于任何标准实数的无穷小量。在给定 $X=x$ 的条件下，对于门限值为 x_0 的门限观测器，Y 的取值为

$$Y=\begin{cases}0, & x<x_0+W\\ 1, & x\geqslant x_0+W\end{cases} \tag{2}$$

其中 W 为观测门限的误差，服从零均值方差为 σ^2 的正态分布，即 $W\sim N(0,\sigma^2)$。不等式 $x\geqslant x_0+W$ 可

收稿日期:2003-07-21
作者简介:陈必红(1955-),男,江苏如皋市人,讲师,博士,主要从事信息论的理论研究.

写为 $x-x_0\geqslant W$ 和 $\frac{W}{\sigma}\leqslant\frac{x-x_0}{\sigma}$，$\frac{W}{\sigma}\sim N(0,1)$。

因此，Y 服从 0－1 分布，且有

$$P(Y=1\mid X=x)=\int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)$$

$$P(Y=0\mid X=x)=1-\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)$$

其中 $\Phi_0(x)$ 是标准正态分布的分布函数，定义为

$$\Phi_0(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

满足性质 $1-\Phi_0(x)=\Phi_0(-x)$

将 Y 的分布按文献[1]表示成概率密度的形式，可得观测函数为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=P(Y=1\mid X=x)\delta(y-1)+P(Y=0\mid X=x)\delta(y)=$$
$$\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\delta(y-1)+\left[1-\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\right]\delta(y)=\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\delta(y-1)+\Phi_0\left(\frac{x_0-x}{\sigma}\right)\delta(y)\qquad(3)$$

则在已经测得 $Y=y$ 条件下，观测主体关于观测客体的知识函数，即后验概率密度函数 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 满足贝叶斯公式：

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(u)f_{Y|X}(y\mid u)\mathrm{d}u}=\frac{\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\delta(y-1)+\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x_0-x}{\sigma}\right)\delta(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\delta(y-1)+\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x_0-u}{\sigma}\right)\delta(y)\mathrm{d}u}=$$
$$\frac{\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\delta(y-1)+\Phi_0\left(\frac{x_0-x}{\sigma}\right)\delta(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0\left(\frac{u-x_0}{\sigma}\right)\delta(y-1)+\Phi_0\left(\frac{x_0-u}{\sigma}\right)\delta(y)\mathrm{d}u}\qquad(4)$$

当 $y\neq0$ 且 $y\neq1$ 时，有

$$f_{X|Y}(x|y)=0$$

当 $y=0$ 时，有

$$f_{X|Y}(x\mid 0)=\frac{\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\frac{\delta}{2}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0\left(\frac{x_0-u}{\sigma}\right)\frac{\delta}{2}\mathrm{d}u}=\frac{\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0\left(\frac{x_0-u}{\sigma}\right)\mathrm{d}u}=2\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\qquad(5)$$

同理，当 $y=1$ 时，有

$$f_{X|Y}(x|1)=2\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\qquad(6)$$

其中的 ε 因子说明了只用一个门限观测器观测一次的观测结果是不收缩的(收缩的定义见文献[3])。综上所述可得

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}2\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right) & y=0\\ 2\varepsilon\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right) & y=1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad(7)$$

2 两个门限观测器的收缩情况

虽然一个门限观测器观测一次的知识函数不收缩，但此知识函数可以作为进一步观测的先验先布，再用第二个门限观测器进行第二次观测，这时的知识函数就有可能收缩。随后用一系列的门限观测器进行观

测，直到所需的精度为止。这是所有的测量仪器的敏感器为数字化所作的事，即将任何一个待测物理量先转换为电压值，再通过 A/D 转换器将其转换为数字。本节研究两个门限观测器的知识函数的情况。

假设第一次用门限值为 x_0 的观测器进行观测获得式(7)的后验概率密度函数，用它作为第二次观测的先验概率密度，然后用门限值为 x_1 的观测器进行第二次观测，获得第二个观测量 Y_1，则在 $Y_1=y_1$ 条件下的观测函数为

$$f_{Y_1|X}(y_1|x)=\Phi_0\left(\frac{x-x_1}{\sigma}\right)\delta(y_1-1)+\left(\frac{x_1-x}{\sigma}\right)\delta(y_1) \tag{8}$$

这样在经过这两次观测后，在获得观测值 $Y=y$，$Y_1=y_1$ 条件下关于 X 的后验概率密度函数为

$$f_{X|Y,Y_1}(x\mid y,y_1)=\frac{f_{Y|X}(y\mid x)f_{Y_1|X}(y_1\mid x)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y|X}(y\mid u)f_{Y_1|X}(y_1\mid u)\,\mathrm{d}u} \tag{9}$$

不妨假设 $x_0<x_1$，而观测值 y,y_1 的取值共有 4 种可能的组合，即$(y=0,y_1=0)$，$(y=0,y_1=1)$，$(y=1,y_1=0)$，$(y=1,y_1=1)$。其中的两种情况$(y=0,y_1=0)$和$(y=1,y_1=1)$相当于数模转换器的溢出，我们不关心这种情况。对于情况$(y=0,y_1=1)$，属于反向，这是由于门限误差太大而两个门限值靠得太近的情况。对于数模转换器的误差分析，我们主要关心的是收缩情况，即$(y=1,y_1=0)$，这时候暗示观测客体 X 的取值在 x_0 和 x_1 之间。如果没有门限误差，观测客体的后验分布是在 x_0 和 x_1 之间均匀分布。下面分析的是存在正态门限误差的情况。当 $y=1$，$y_1=0$ 时，可得：

$$f_{X|Y,Y_1}(x\mid 1,0)=\frac{\frac{\delta}{2}\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\times\frac{\delta}{2}\Phi_0\left(\frac{x_1-x}{\sigma}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta}{2}\Phi_0\left(\frac{u-x_0}{\sigma}\right)\times\frac{\delta}{2}\Phi_0\left(\frac{x_1-u}{\sigma}\right)\mathrm{d}u}=\frac{\Phi_0\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)\Phi_0\left(\frac{x_1-x}{\sigma}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0\left(\frac{u-x_0}{\sigma}\right)\Phi_0\left(\frac{x_1-u}{\sigma}\right)\mathrm{d}u} \tag{10}$$

在分子上记

$$z=\frac{x-\frac{x_0+x_1}{2}}{\sigma},z_0=\frac{x_1-x_0}{2\sigma}\geqslant 0 \tag{11}$$

同理在分母作换元 $v=\frac{u-\frac{x_0+x_1}{2}}{\sigma}$，可得

$$f_{X|Y,Y_1}(x\mid 1,0)=\frac{\Phi_0(z+z_0)\Phi_0(-z+z_0)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(v+z_0)\Phi_0(-v+z_0)\,\mathrm{d}v} \tag{12}$$

如果将此函数看作是变元 z 的函数，则是偶函数。这说明此时的后验概率密度函数以二门限值 x_0,x_1 的中点$\frac{x_0+x_1}{2}$对称。

3 后验方差

当门限误差的方差 $\sigma^2=0$ 时，经过二门限值为 x_0,x_1 的门限观测器并产生收缩的观测客体 X 的后验分布为在区间(x_0,x_1)间均匀分布，因此，其后验方差为$\frac{(x_1-x_0)^2}{12}$，或者说后验标准差为$\frac{x_1-x_0}{\sqrt{12}}=0.288\ 672(x_1-x_0)$。

当后验概率密度由式(12)式给出时，记后验均值为$\mu_P=\frac{x_0+x_1}{2}$，后验标准差为 σ_P，且有

$$\sigma_P=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_P)^2 f_{X|Y,Y_1}(x\mid 1,0)\,\mathrm{d}x} \tag{13}$$

σ_P 只能用数值计算的办法算出，且只和参数 $z_0=\frac{x_1-x_0}{\sigma}$ 有关，即二门限间隔和门限标准差之比。

编写程序计算出不同的 $z_0=\frac{x_1-x_0}{\sigma}$ 值下的后验标准差与门限差 x_1-x_0 之比的值如表 1 所示。

表 1 后验标准差与门限差 x_1-x_0 之比的值

$z_0=\frac{x_1-x_0}{\sigma}$	0.1	1	2	3	4	5	10	20	50	∞
$\frac{\sigma}{x_1-x_0}$	4.649	0.574	0.382	0.333	0.315	0.306	0.293	0.290	0.289	0.288 7

可以看出，随着 z_0 的增大，后验标准差与门限差 x_1-x_0 之比也越来越接近于均匀分布的情况。此表可用来估计模数(A/D)转换器的估计误差。

例如，假设一数字电压表测量范围在 0 V 至 10 V 之间，量化间隔将 10 V 电压细分为 256 格，即最后的两门限间隔为 $x_1-x_0=10/256=0.039$ V，门限误差的标准差为 $s=0.01$ V，则 $z_0=(x_1-x_0)/\sigma=4$，由上表可查出后验标准差 $\sigma_P=0.315\times0.039=0.012$ V。

但应当注意的是，最后对观测客体的估计应当取两门限 x_0 和 x_1 的中点 $(x_1+x_0)/2$，这即是最大后验估计，也是最小均方估计，按传统的估计理论，它也是最大似然估计，而做得比较粗糙的 A/D 转换器往往忽略了取中点的操作。

4 结束语

在文献[3]提出了观测过程的一般理论，并提出广义分布的概念，引入非标准的无穷大及无穷小数之后，本文试图解决实际的问题，即带误差的门限观测器的分析，还可以分析用这样的门限观测器对观测客体做反复地进一步测量时得到的知识分布。

参考文献：

[1] 陈必红. 门限观测器及周期观测器的收缩性研究[J]. 深圳大学学报(理工版)，1999,16(1):9-13.
[2] 陈必红. 利用知识分布进行决策[J]. 深圳大学学报(理工版)，2001，18(1):39-44.
[3] 陈必红. 观测中的信息传递与广义均匀分布[J]. 深圳大学学报(理工版)，1998,15(2):17-21.
[4] 陈必红. 观测过程中的信息熵变化[J]. 深圳大学学报(理工版)，1998,15(4):8-12.

(编辑：田新华)

A Threshold Observer with Normal Error

CHEN Bi-hong
(Department of Mathematics Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: This paper uses the basic theory of observation process for analyzing the posterior distribution, approaches the situation when two threshold observers get shrinking, and gives the error estimation of A/D transformer.

Key words: normal error; threshold; observer; error estimation of A/D transformer