

ELMS 算法及其变步长算法研究

冯存前, 张永顺, 韩英臣

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘要:在分析 LMS 算法的基础之上,对作为其改进算法的 ELMS 算法进行了研究,并对二者的性能进行了分析比较,指出了 ELMS 算法的优越性。进而,提出了一种变步长 ELMS 算法(VSS - ELMS),理论分析和计算机仿真均表明该算法具有较快的收敛速度和更好的稳态性能,可以很好地应用于自适应系统中。

关键词:LMS 算法;ELMS 算法;变步长;信号估计器

中图分类号:TM972 **文献标识码:**A **文章编号:**1009 - 3516(2004)02 - 0077 - 04

LMS 算法因其结构简单、稳定性好,一直是自适应滤波经典、有效的算法之一,被广泛地应用于自适应控制、雷达、系统辨识及信号处理等领域^[1]。但此算法的缺点是收敛速度慢,如果为了加快收敛速度而增大步长因子 μ ,则会导致稳态误差增大,甚至引起算法发散。为了改善 LMS 算法的性能,人们发展了各种各样的改进算法。如:NLMS 算法、频域 LMS 算法^[2]、模糊 LMS 算法、变步长 LMS 算法^[3]等。本文在分析 LMS 算法的基础之上,对作为其改进算法的 ELMS(Extended LMS Algorithm)算法^[4]作了研究,并将变步长思想引入 ELMS 算法,提出了一种性能较好的变步长 ELMS 算法(VSS - ELMS)。

1 LMS 算法与 ELMS 算法

1.1 ELMS 算法的引入

基于最速下降法的最小均方误差(LMS)算法的迭代公式如下^[1]

$$\varepsilon(n) = d(n) - y(n) = s(n) + x_0(n) - y(n) \quad (1)$$

$$y(n) = \mathbf{X}^T(n) \mathbf{W}(n) \quad (2)$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu\varepsilon(n)\mathbf{X}(n) \quad (3)$$

其中; $\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N+1)]^T$ 表示时刻 n 的自适应滤波器输入信号矢量,由最近 N 个输入信号 $x(n)$ 的采样值构成; $\mathbf{W}(n) = [\omega_0(n), \omega_1(n), \dots, \omega_{L-1}(n)]^T$ 是时刻 n 自适应滤波器的权系数; N 是自适应滤波器的阶数; $d(n)$ 是期望输出值,由有用信号 $s(n)$ 和干扰或噪声信号 $x_0(n)$ 构成; $x_0(n)$ 一般是与 $x(n)$ 相关的信号; $y(n)$ 是自适应输出信号; $\varepsilon(n)$ 是误差; μ 是控制稳定性和收敛速度的参量,称之为步长因子。

LMS 算法在实际应用中为了便于系统实时实现,一般用瞬时误差梯度 $\hat{\nabla}(n)$ 代替均方误差梯度 $\nabla(n)$ 进行运算,如下面 2 式所示:

$$\nabla(n) = -2E[\varepsilon(n)\mathbf{X}(n)] \quad (4)$$

$$\hat{\nabla}(n) = -2\varepsilon(n)\mathbf{X}(n) \quad (5)$$

分别将式(1)、(2)代入式(4)和式(5),可得:

$$\begin{aligned} \nabla(n) &= -2E[\varepsilon(n)\mathbf{X}(n)] = -2E\{[s(n) + x_0(n) + \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]\mathbf{X}(n)\} = \\ &= -2E\{[x_0(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]\mathbf{X}(n)\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}(n) &= -2\varepsilon(n)X(n) = -2[s(n) + x_0(n) - X^T(n)W(n)]X(n) = \\ &= -2s(n)X(n) - 2[x_0(n) - X^T(n)W(n)]X(n) \end{aligned} \quad (7)$$

对比上面 2 式可以发现,瞬时梯度值 $\hat{\nabla}(n)$ 中附加了一项在均方误差梯度值 $\nabla(n)$ 中应为零矢量的误差矢量 $-2s(n)X(n)$,其大小直接受到输入有用信号的影响。特别是当 LMS 算法趋近于收敛时,式(7)中第 2 项将趋近于零,此时瞬时误差梯度值 $\hat{\nabla}(n)$ 将正比于该误差矢量 $-2s(n)X(n)$,使稳态误差受到有用信号 $s(n)$ 的调制。

由此看来,在 LMS 算法中利用 $\hat{\nabla}(n)$ 来替代 $\nabla(n)$ 虽然方便了系统的实时实现,但却带来了不必要的误差,当输入有用信号 $s(n)$ 的幅度变化比较大时尤为明显。为此,文献[4]中引入了 ELMS 算法。在该算法中,采用了修正的瞬时梯度估计值:

$$\hat{\nabla}(n)_{ELMS} = -2[\varepsilon(n) - \hat{s}(n)]X(n) = -2[\varepsilon(n) - \hat{s}(n)]X(n) - 2[x_0(n) - X^T(n)W(n)]X(n) \quad (8)$$

式中, $\hat{s}(n)$ 为 n 时刻有用信号 $s(n)$ 的预测估计值。相应的,ELMS 算法可以表述为

$$\varepsilon(n) = d(n) - X^T(n)W(n) \quad (9)$$

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu[\varepsilon(n) - \hat{s}(n)]X(n) \quad (10)$$

一般情况下进行此番修正之后,ELMS 算法的稳态性能要比 LMS 算法优越,而且 $s(n)$ 的预测估计值 $\hat{s}(n)$ 越接近 $s(n)$,ELMS 算法的稳态性能越好。因此,如何实现对有用信号 $s(n)$ 的有效预测估计,是一个相当重要的问题。

1.2 信号的预测估计

在最小均方误差准则下,自适应滤波器实际上是能自动调节其本身的单位样本响应以达到最优化的维纳滤波器,因此可以由自适应维纳滤波器构成自适应预测估计器来进行对信号 $s(n)$ 的有效预测估计。采用此预测估计器的 ELMS 算法方框图如图 1 所示。

相应的,此时 ELMS 算法的迭代公式可以表述为

$$\varepsilon(n) = d(n) - X^T(n)W(n) \quad (11)$$

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu[\varepsilon(n) - \hat{s}(n)]X(n) \quad (12)$$

$$\hat{s}(n) = E^T(n)W_1(n) \quad (13)$$

$$W_1(n+1) = W_1(n) + 2\mu[\varepsilon(n) - \hat{s}(n)]E(n) \quad (14)$$

式中:向量 $E(n) = [\varepsilon(n), \varepsilon(n-1), \dots, \varepsilon(n-L+1)]^T$; L 是自适应维纳预测估计器的阶数; $W_1(n) = [\omega_{10}(n), \omega_{11}(n), \dots, \omega_{1L-1}(n)]$; μ 和 μ_1 一样,均为步长因子,且在实际运算中常常选择 $\mu_1 = \mu$ 。

采用这种估计器,信号的估计值 $\hat{s}(n)$ 可以有效实时地跟踪有用信号 $s(n)$ 的变化,始终逼近 $s(n)$,使得 ELMS 算法的优越性得以保证,且计算量仅增加 $2L$ 乘法与 L 次加法,当 L 选择合适时,计算量增加仍然是有限的,也是可以接受的。

2 变步长 ELMS 算法

ELMS 算法尽管它在稳态性能方面较 LMS 算法要优越一些,但是,二者有着很重要的相同点,即它们都是固定步长因子的自适应算法。因此,ELMS 算法也存在着提高收敛速度和减小稳态误差之间的矛盾,而且因为采用自适应维纳预测估计器进行有用信号的估计,使得 ELMS 算法的收敛速度较之 LMS 算法变得更慢。这些显然与我们对于自适应滤波算法的要求是背道而驰的。基于这一点,我们将瞬变步长的思想引入到 ELMS 算法当中,这样既保持了该算法稳态性能好的优点,又能利用变化的步长来提高收敛速度。

对于变步长 LMS 自适应算法来说,必须遵循这样的步长调整原则:即在初始收敛阶段或未知系统参数发生变化时,步长应比较大,以便有较快的收敛速度或对时变系统的跟踪速度;而在算法收敛后,不管主输入端干扰信号有多大,都应保持很小的调整步长以达到很小的稳态失调噪声。根据这一原则,我们给出一个变

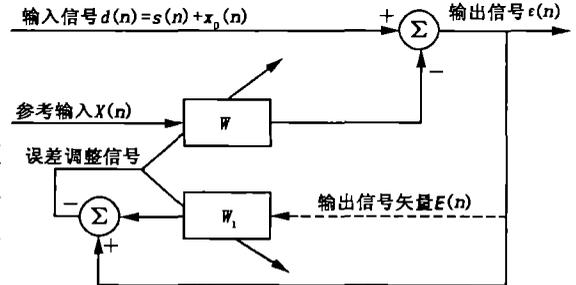


图 1 采用自适应维纳预测估计器的 ELMS 算法方框图

步长的 ELMS 算法 (VSS - ELMS), 它的基本思想是基于这样一个事实, 即当自适应算法逼近最佳值时, 不但自适应误差的功率变得很小, 而且误差信号的各个采样点之间的相关性也非常小。因此, 可以通过误差信号各采样值之间的自相关估计 $p(n)$ 来控制步长更新^[3], 这样, 得出的 VSS - ELMS 算法步长迭代公式为

$$\mu_{n+1} = \alpha\mu(n) + \gamma p^2(n) \tag{15}$$

$$p(n) = \beta p(n-1) + (1-\beta) [\varepsilon(n) - \hat{s}(n)] \cdot [\varepsilon(n-1) - \hat{s}(n-1)] \tag{16}$$

并且,

$$\mu_{n+1} = \begin{cases} \mu_{\max} & \mu(n+1) > \mu_{\max} \\ \mu_{\min} & \mu(n+1) < \mu_{\min} \\ \mu(n+1) & \text{其它} \end{cases} \tag{17}$$

式中; $0 < \alpha < 1, \gamma > 0, 0 < \beta < 1$; 一般情况下, μ_{\max} 的选择接近标准 LMS 算法不稳定的步长点, 以提供最大的可能收敛速度, 而 μ_{\min} 则在稳定状态下, 根据所预期的失调和算法的收敛速度做出一个合适的选择; 参数 γ 用来控制算法的失调和收敛时间; 参数 β 是一指数型权系数参数, 也用来控制收敛时间。

在这里使用 $p(n)$ 来更新 $\mu(n)$ 是因为自相关误差通常是权值接近最佳值的较好衡量标准, 而且在更新过程中排除了不相关噪声的影响。在自适应初始阶段, 自相关估计误差 $p(n)$ 较大, 导致较大的步长 $\mu(n)$, 这使得收敛速度加快; 当接近最佳值时, 自相关误差 $p(n)$ 接近于零, 导致一个较小的步长在最佳值附近产生较小的失调。

3 计算机仿真

本文以单频正弦波叠加高斯白噪声作为期望信号 $d(n)$, 自适应滤波器输入信号 $x(n)$ 为与高斯白噪声相关的噪声信号, 采用传统的 LMS 算法、ELMS 算法以及 VSS - ELMS 算法分别进行自适应噪声对消仿真比较。为了兼顾收敛速度和稳态误差, 将标准 LMS 算法和 ELMS 算法步长均选为 $\mu = 0.005$, 而经过多次试验, 将 VSS - LMS 算法中参数确定为 $\alpha = 0.993, \gamma = 0.02, \beta = 0.999, \mu_{\max} = 0.05, \mu_{\min} = 0.0002$ 。每种算法分别作了 200 次独立仿真, 然后求其统计平均, 得出仿真结果如图 2 所示。

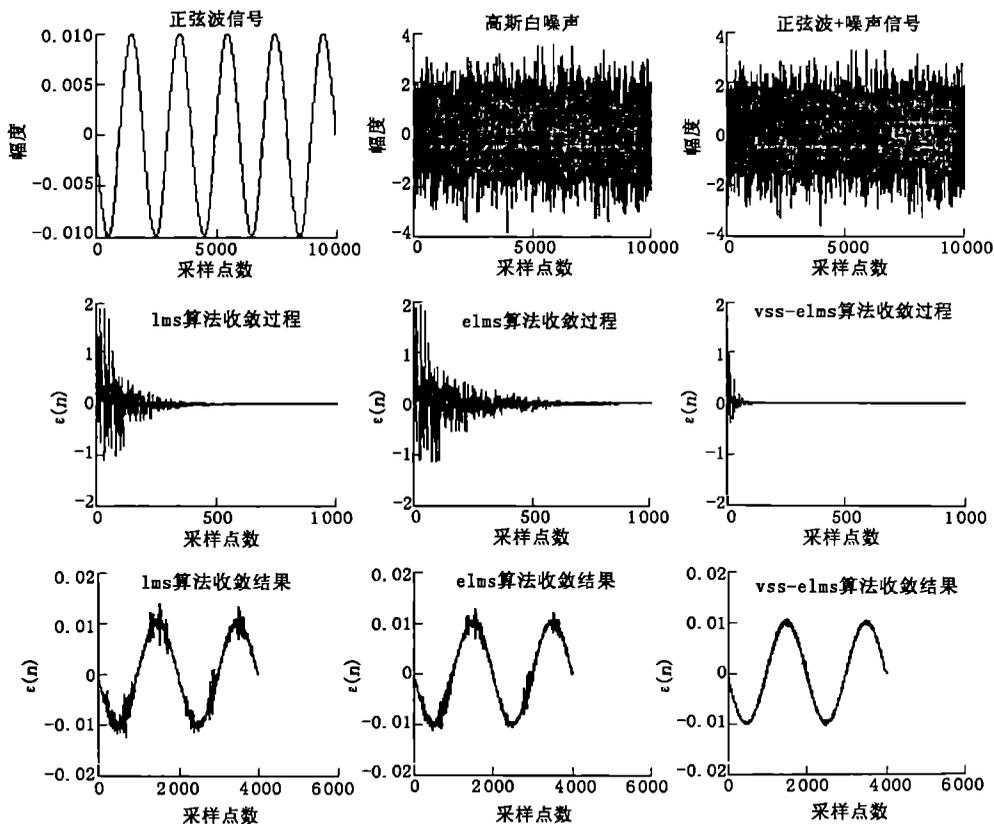


图 2 LMS 算法、ELMS 算法和 VSS - ELMS 算法的计算机仿真结果

由图 2 可以看出, 在相同的步长条件下, ELMS 算法与 LMS 算法的收敛速度都比较慢, 而采取了变步长

措施的 VSS - ELMS 算法的收敛速度则要比前二者快许多。另外,虽然在选择步长因子时已兼顾收敛速度和稳态误差,但是 LMS 算法的稳态效果仍然比较差,相对来说,ELMS 算法的收敛结果要好一些,这说明了前面理论分析的正确性,同时也表明本文在 ELMS 算法采用自适应维纳预测估计器进行预测估计有用信号的方法是有效的。相比之下,VSS - ELMS 算法的收敛精度是相当好的。因此,仿真结果表明:ELMS 算法的稳态性能要优于 LMS 算法,而基于变步长思想的 VSS - ELMS 算法相比 LMS 算法和 VSS - ELMS 算法来说,既具有较快的收敛速度,又具有更好的稳态性能。

4 结束语

本文在 LMS 算法的基础之上研究了 ELMS 算法及其变步长算法——VSS - ELMS 算法。理论推导及计算机仿真结果表明,ELMS 算法克服了 LMS 算法中用瞬时误差梯度代替均方误差梯度带来的缺点,它的稳态性能要优于 LMS 算法。而将变步长思想和 ELMS 算法结合起来得到的 VSS - ELMS 算法则具有较快的收敛速度和更好的稳态性能,它对于输入信号的变化、算法的收敛速度和精度以及算法步长因子的调整都给出了较好的解决办法,能有效的应用于自适应系统中。

参考文献:

- [1] 虞 晓,胡光锐,吴小滔. 自适应噪声对消中的 ELMS 算法及其变步长算法[J]. 上海交通大学学报,1998,32(4):92 - 96.
- [2] Abounasr T,Mayyas K. A robust variable step - size LMS - type algorithm: analysis and simulation[J]. IEEE Trans. Signal processing,1997,45(3):631 - 639.
- [3] 王布宏,郭 英. 频域 LMS 算法在语音消噪中的应用[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2000,1(3):64 - 67.
- [4] 沈福民. 自适应信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2001.

(编辑:田新华)

Research on ELMS Algorithm and Variable Step Size Algorithm

FENG Cun - qian, ZHANG Yong - shun, HAN Ying - chen

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: Based on analysis of LMS algorithm, the ELMS algorithm is researched, which is regarded as an improved algorithm of LMS. The performances of the two algorithms are analyzed and compared, and the advantages of ELMS are pointed out. Then, a variable step size ELMS algorithm is proposed, the theoretical analysis and computer simulation indicate that the new algorithm has quite fast convergence rate, better steady performance and can be applied to adaptive systems effectively.

Key words: LMS algorithm; ELMS algorithm; variable step size; signal estimator