

## 二级倒立摆的三种控制方法比较

王芳, 周军

(西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:**通过采用LQY最优控制、变结构控制及模糊控制3种方法对二级倒立摆系统进行实时控制,从理论上讨论了这类典型的非线性自不稳定系统控制器的设计方法,通过分析指出各种方法之间的优缺点,并通过数字仿真加以证实。

**关键词:**二级倒立摆;非线性;LQY控制;变结构控制;模糊控制

**中图分类号:**V44;TP273 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2004)02-0037-04

倒立摆系统是绝对不稳定系统,它的稳定控制对于验证各种控制理论具有很大的实用性。由于单级倒立摆系统比较简单,而三、四级又过于复杂,因此选择二级倒立摆系统,分别采用LQY最优控制器、变结构控制器及模糊控制器来控制,并对3种控制器进行对比,从数字仿真上进一步证实了各控制器的控制效果。

### 1 系统建模

倒立摆系统机械部分见图1。在建立系统的运动学及动力学方程时,为便于推导,做出以下假设:①上下摆杆在运动中都是不变形的刚体,且没有在与滑轨成垂直方向上的前后运动;②齿型带与带轮之间无任何相对滑动,齿型带无拉伸现象;③放大器的输入与输出之间成严格的线性关系;④小车在运动过程中所受的摩擦力正比于小车的运行速度,摆杆转动时,所受的摩擦阻力矩正比于摆杆的转动速度。另外,为了推导方便,定义一些常用的符号: $r$ 为小车的位移(m); $\theta_2, \theta_1$ 为上、下摆的角位移(rad); $M_0, M_1, M_2$

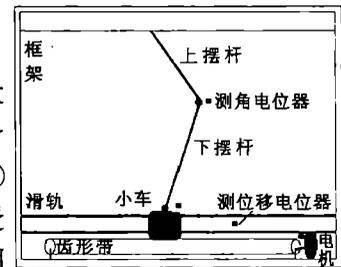


图1 倒立摆机械结构

为小车系统、下摆、上摆的等效质量(kg); $L, l_1, l_2$ 分别为下摆转动轴心到上摆转动轴心的距离,下摆\上摆重心到其转动轴心的距离(m); $f_0, f_1, f_2$ 分别为小车系统、下摆、上摆的等效摩擦系数( $N \cdot s/m$ ); $J_1, J_2$ 为下摆\上摆对其重心的转动惯量( $Kg \cdot m^2$ ); $F$ 为电机输出的拉力(N); $G_0$ 为功放和电机折合到小车上的控制力与功放输入电压之比。动力学方程如下:取状态变量 $Y^T = [r, \theta_1, \theta_2, \dot{r}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]$ ,得: $HY_1 = JY + KF$ ,  $H =$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ F(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) & M(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix}, JY = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ N(\theta_1, \theta_2) & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, M(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} M_0 + M_1 + M_2 & (M_1 l_1 + M_2 l_2) \cos \theta_1 & M_2 l_2 \cos \theta_2 \\ (M_1 l_1 + M_2 l_2) \cos \theta_1 & J_1 + M_1 l_1^2 + M_2 L^2 & M_2 L l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ M_2 l_2 \cos \theta_2 & M_2 L l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & J_2 + M_2 l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$N(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_1 l_1 + M_2 L) g \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, K^T = [0, 0, 0, 1, 0, 0], F = G_0 U。在平衡点  $r$$$

收稿日期:2003-10-09

作者简介:王芳(1979-),女,浙江龙游人,硕士生,主要从事导航、制导与控制研究;

周军(19-),男,陕西西安人,教授,博士生导师,主要从事导航与制导控制研究。

$=\theta_1 = \theta_2 = r = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$  线性化, 并取  $X^T = [r, \theta_1, \theta_2 - \theta_1, \dot{r}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1]$ , 可得系统状态方程为  $X = AX + BU$ , 输出方程为:  $Y = CX$ , 其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.0367 & 0.0162 & -74.9831 & -0.0183 & 0.0026 \\ 0 & 39.6461 & -7.5523 & 274.3246 & -0.8217 & 0.0401 \\ 0 & -44.5953 & 63.9678 & -308.5697 & 1.8901 & -1.1646 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.7496 \\ -17.3765 \\ 19.5456 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2 三种不同控制器的设计

### 2.1 最优控制策略中的 LQY 调节器

首先构造被控系统的能控性矩阵  $M_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ , 通过计算可得  $\text{rank}(M_c) = 6$ , 即系统可控。根据线性系统理论, 可以设计状态反馈控制器使闭环系统的极点配置在  $S$  域任意位置。设输出反馈调节律形式为  $U(k) = -K_y X(k)$ 。此时可通过使性能指标函数  $J_y = \sum Y(k)^T Q_y Y(k) + U(k)^T R_y U(k)$  为最小求得  $K_y = (B^T S B + R_y)^{-1} (B^T S A)$ , 由下列 Riccati 方程  $A^T S A - K_y + C^T Q_y C = S$  获得。式中  $Q_y, R_y$  分别用来对输出向量  $Y(k)$ , 控制向量  $U(k)$  引起的性能度量相对重要性进行加权。在实际系统的控制过程中, 取  $Q_y = I_6, R_y = 0.5$ 。为了使系统的瞬态响应特性既快速又具备良好的阻尼, 根据经典控制规律, 需使系统的闭环极点落在复平面特定的区域, 即  $\zeta > 0.4, t_s < \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta \omega_n}$ , 故取  $\zeta = 0.5, t_s = 1$ , 利用主导极点法进行系统极点配置, 可知系统的主导极点  $e_{1,2} = -1 \pm i$ , 另取极点  $e_3 = -6, e_4 = -8, e_5 = -10, e_6 = -12$ , 进行极点配置, 可得反馈增益阵为  $k = [1.4142 \ 105.6091 \ 287.7117 \ 1.0168 \ 39.2592 \ 36.3678]$ 。

### 2.2 变结构控制器

变结构控制器的设计分两步完成。第一步是可达性设计, 即把空间中的点在控制力的作用下转移到某一设计超平面; 第二步是滑动超平面设计, 即把超平面上的点移到原点。系统经线性变换转换成可控标准型, 其状态方程为  $X = AX + BU$ , 设计滑动模态域  $S = GX = 0, G = [g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4 \ g_5 \ 1]$ 。将其带入状态方程中有  $X = AX + B[-(GB)^{-1}GAX] = [I - B(GB)^{-1}G]AX$ 。该式称为变结构控制在滑动模态下的等价系统。当给定的闭环系统理想极点分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  时, 则由  $s^{n-1} + g_{n-1}s^{n-2} + \dots + g_2s + g_1 = \prod_{i=1}^{n-1}(s - \lambda_i)$  可求出保证等价系统性能达到指标要求的滑动模态参数。

设计变结构控制  $u$  是系统的状态反馈形式  $u = -\sum_{i=1}^m k_i x_i, 1 \leq m \leq n-1$ , 控制律反馈系数  $k_i$ , 当  $x_i s > 0, k_i = \alpha_i \geq \frac{1}{b}(g_{i-1} - a_i - g_{i-1}g_i + a_n g_i)$ ; 当  $x_i s < 0, k_i = \beta_i \leq \frac{1}{b}(g_{i-1} - a_i - g_{i-1}g_i + a_n g_i)$ 。通过仿真及实际控制经验, 选择期望极点  $p = [-0.09 + 0.1i \ -0.09 - 0.1i \ -0.6 \ -0.8 \ -1]$ , 可得系统的滑动模态域为  $G = [0.0087 \ 0.1204 \ 0.8618 \ 2.3301 \ 2.58 \ 1.00]$ 。控制律反馈系数  $k_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$  为: 当  $x_i s > 0, k_i = [0.65 \ 0 \ 3.480 \ 7.680 \ 155]$ ;  $x_i s < 0, k_i = [0.60 \ -150.000 \ 3.460 \ 7.670 \ 150]$ 。

### 2.3 模糊控制器

隶属度函数见图 2, 控制结构见图 3, 控制规则见表 1。推理规则采用 sugeno 规则。

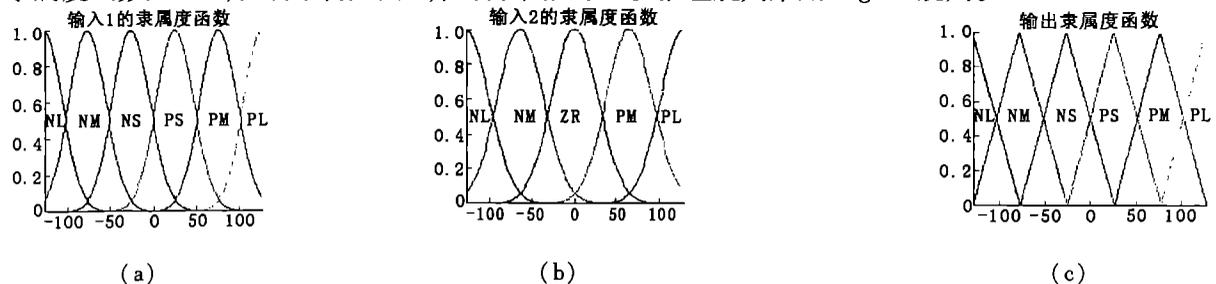


图 2 隶属度函数图

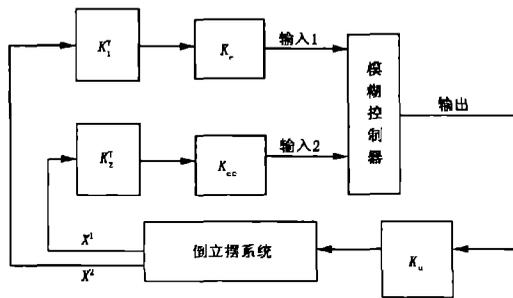


图3 模糊控制器结构图

表1 控制规则

输入1	输入2				
	NL	NM	ZR	PM	PL
	输出				
NL	PL	PL	PL	PM	PS
NM	PL	PM	PM	PS	NS
NS	PL	PK	PS	NS	NM
PS	PM	PS	NS	NM	NL
PM	PS	NS	NM	NM	NL
PL	NS	NM	NL	NL	NL

模糊控制器由综合误差  $E$  和综合误差变化  $EC$  构成。其中： $u = f(E, EC)$ ， $E = K_1^T X_1 = [k_1 \ k_2 \ k_3]$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, EC = K_2^T X_2 = [k_4 \ k_5 \ k_6] \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, K^T = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6]。$$

通过求解 Ricatti 方程： $PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T Q C = 0$ ，得  $K^T = R^{-1}B^T P$ 。 $k_e, k_{ec}$  可以实时改变。当  $E \geq E_{\text{threshold}}$  时， $k_e = k_e^1$ ，当  $E < E_{\text{threshold}}$  时， $k_e = k_e^2$ ；当  $EC \geq EC_{\text{threshold}}$  时， $k_{ec} = k_{ec}^1$ ，当  $EC < EC_{\text{threshold}}$  时， $k_{ec} = k_{ec}^2$ 。取性能参数指标为 ITAE 积分性能指标  $J = \int_0^{\infty} t \|E\| dt$ ，使之最小，经参数寻优和调整，得控制器参数如下： $E_{\text{threshold}} = EC_{\text{threshold}} = 0.05$ ； $k_e^1 = 4$ ； $k_e^2 = 10$ ； $k_{ec}^1 = 10$ ； $k_{ec}^2 = 20$ ； $k_u = 0.1675$ ； $K_1^T = [3.162 \ 3 \ 49.213 \ 8 \ 168.831 \ 9]$ ； $K_2^T = [4.115 \ 5 \ 22.114 \ 5 \ 27.121 \ 0]$ 。

### 3 仿真结果分析及对比

#### 3.1 最优控制策略中的 LQY 调节器仿真结果及分析

在 2.1 中得到的系统反馈增益阵  $k$  下对系统进行仿真，得到控制输出见图 4。由仿真图可知，先用最优控制理论中的 LQY 调节器获得系统的最佳极点，然后用此极点进行极点配置，这样所得的控制器系统的瞬态响应速度很快，而且系统的阻尼特性和鲁棒性也很好。

#### 3.2 变结构控制仿真结果及分析

二级倒立摆的输出下摆角轨迹  $y_1$ 、上摆角轨迹  $y_2$  和输出位移轨迹  $y_3$  见图 5。在做变结构控制仿真时，由于被控对象模型中的状态矩阵是一个病态矩阵，从而导致理论计算与实际偏差很大。故需先对被控对象进行模型校正。

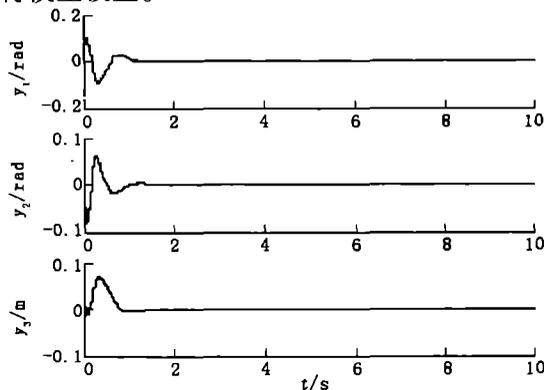


图4 LQY 控制器输出

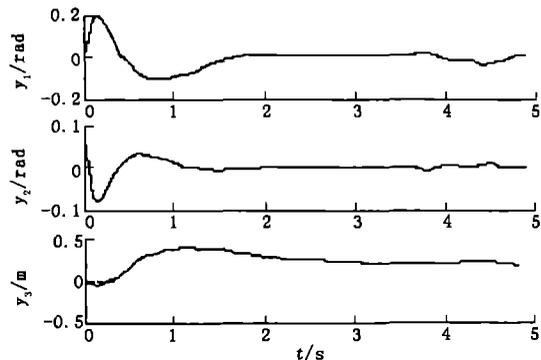


图5 变结构控制器输出

3.3 模糊控制结果及分析模糊控制算法下得到的仿真曲线见图 6。仿真表明该系统的超调量在这三种算法中是最小的，但其快速性最差。由于模糊控制算法很多，当增加模糊控制器的个数时，模糊控制规则增加，可调参数变多，系统的稳定性和快速性也相应改善，但这是以增加系统结构的复杂性为代价的。

#### 3.4 三种控制器控制结果比较

从上面的讨论中可得出以下结论：

1) 从仿真效果来看,最优控制策略中的LQY控制在鲁棒性、快速性和稳态性方面是最优的,变结构控制次之。实际中模糊控制和变结构控制的控制效果大大优于LQY控制。这是因为经典控制理论对解决高阶问题不理想;而线性系统理论对模型准确度的要求又非常高,故在实际应用中受到很大的限制。

2) 从抗干扰能力来看,当增加外部扰动时,模糊控制在这方面是最好的,该算法抗干扰能力可达 $10^\circ$ ,若增加模糊器的个数和控制规则,其抗干扰能力可达 $25^\circ$ ,变结构控制抗干扰能力小于 $10^\circ$ ,LQY状态反馈控制抗干扰能力最大为 $7^\circ \sim 8^\circ$ 。

3) 从控制结构的复杂性来看,变结构控制器结构最简单,其次是LQY调节器,最后是模糊控制器。变结构控制鲁棒性很强,可降低对控制对象的要求,并且它具有较强的参数变化不敏感性,对于同批次的二级倒立摆可以只建一个模型,这样有利于实验室的建设,也有利于学生的试验。

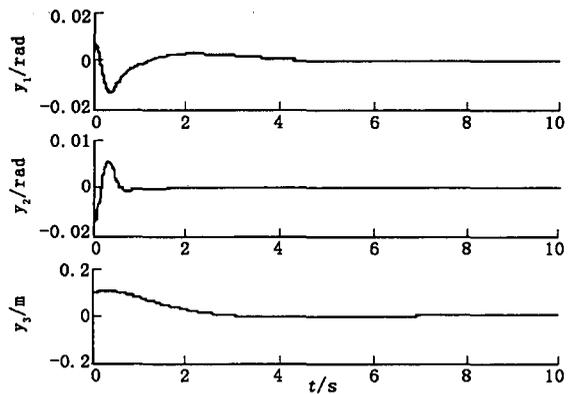


图6 模糊控制器输出

## 4 结束语

本文根据线性系统理论、最优控制理论和模糊控制理论设计的三种控制器,其可行性在二级倒立摆系统上得到了验证。同时本文还比较了这三种控制器的优缺点,指出变结构控制器在结构上最简单,易于实验室建设。近代机械控制系统中,如直升飞机、导弹控制、火箭发射、人造卫星运行及机器人举重、做体操和行走机器人步行控制等等,都存在着类似于倒立摆的稳定控制问题,因此其研究成果在这些控制系统中也有一定的借鉴意义。

### 参考文献:

- [1] Jianqiang Y I, Naoyoshi Y, Kaoru H. Stabilization Fuzzy Control of Parallel - Type Double Inverted Pendulum System[J]. IEEE Control System Magazine, 2000, 9: 132 - 136.
- [2] 刘春生, 吴庆宪, 邹新生. 二级倒立摆的模糊控制[J]. 电光与控制, 2000, 80(4): 11 - 16.
- [3] 丁景涛, 周凤岐. 二级倒立摆系统的变结构控制实现[J]. 西北工业大学学报, 2002, 20(3): 25 - 28.
- [4] 陈新海, 李言俊, 周军. 自适应控制及应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

(编辑: 姚树峰)

## A Comparison Study of Three Controls of Double Inverted Pendulum System

WANG Fang, ZHOU Jun

(The Airspace Institute, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** This paper makes a comparison between the results of controlling the double inverted pendulum system with the optimization control of LQY, variable structure control and fuzzy control, discusses the design method of this typical non - linear unsteady controller in theory, and simultaneously points out the advantages and disadvantages of these three controls through digital simulations.

**Key words:** double inverted pendulum; non - linear; LQY control; variable structure control; fuzzy control