

构造 AHP 判断矩阵的差标度法

李凌鹏, 郭乃林, 任继业
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘要:针对不具备专家群判实力的个人或团体在用层次分析法(AHP)进行决策时判断矩阵的构造难的问题,提出“差标度法”合理确定标度,用这种方法构造的判断矩阵在不违背人的主观意愿的前提下一次满足一致性,极大地简化了计算过程,打破了以往纯粹从数学的角度来追求一致性的标度研究模式,扩展且灵活运用萨蒂的9标度,提高了AHP方法的实用性。

关键词:AHP标度;判断矩阵;一致性

中图分类号:0241.6 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2004)01-0092-03

层次分析法(AHP)是美国运筹学家萨蒂于70年代提出的,是一种定性与定量相结合的多目标决策分析方法^[1]。层次分析法求解步骤之一:同层次求单权重,是按9标度法对该层次的因素进行两两比较,构造出判断矩阵并求出最大特征根,同时进行一致性检验。^[2]通常情况下,只要判断矩阵构造得合乎人的形式逻辑,得出的结果几乎满足一致性,但有时需要多次对判断矩阵进行校正,问题就出在标度的选取上,标度是使系统由无结构状态转化为有结构状态的关键,文献[3]~[5]对标度进行了研究,文献[3]重点研究了标度与语言的协调性,提出了两种标度并就计算精确度与9标度进行比较;文献[4]在文献[3]的基础上提出了指数标度,并与文献[3]的两种标度对计算精确度的影响进行比较;文献[5]对文献[3]、[4]的标度质疑,认为标度要通过专家群判断^[3]确定。可以看出,文献[3]、[4]研究的侧重点在于标度对权值计算的精确度的影响,对普遍的优先排序问题没有考虑,文献[5]的建议不适用于个人决策和不具备专家群判实力的团体决策,以上文献还有一个共同点是它们没有考虑标度对判断矩阵一致性的影响,文中的例子皆是低阶的且已经满足一致性。可是在现实生活中判断的因素指标很多,判断矩阵往往是高阶的,阶数越高越不容易趋于一致^[2],这时考虑的重点是在不违背人主观意愿的前提下,使判断矩阵尽快趋于一致,基于这个问题,本文提出“差标度法”,实验证明用这种方法构造的判断矩阵一次性满足一致性,不再需要进行校正,使AHP的使用更加方便。

1 AHP 中判断矩阵一致性的检验

设: $n \times n$ 阶判断矩阵 $A = (a_{ij})$,由文献[2]知:① $a_{ii} = 1, a_{ij} > 0$;② $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$;③若 $a_{ij} = \frac{a_{ik}}{a_{jk}}$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$),则 A 为一致性矩阵。

通常由专家构造的判断矩阵并不满足上述③的表达,为此需要进行一致性检验。设判断矩阵一致性检验指标 CR ,对于 $n \times n$ 阶判断矩阵 A ,按公式 $Aw = \lambda w$ 求出其最大特征根 λ_{max} ,再计算 $CR = (\lambda_{max} - n) / (n - 1)$,若 $0 < CR < 0.1$,则认为 A 满足一致性。否则,需要进行一致性校正。

2 判断矩阵校正的误区

在文献[7]中,作者提出了判断矩阵校正的方法,文中例子的(甲、乙、丙、丁4个因素指标)因素指标如

收稿日期:2002-11-29

作者简介:李凌鹏(1979-),男,湖北天门人,硕士生,主要从事决策支持与管理信息系统研究。

下:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \end{array} & & \begin{array}{cccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} & \text{丁} \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & 3 & \frac{1}{5} \\ 9 & 1 & 5 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\text{进行校正}} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 9 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 CR=0.1687 > 0.1 & & CR=0.0025 < 0.1
 \end{array}$$

从校正的结果看,虽然它满足了一致性的要求,但已经违背了人的主观意愿,本来甲比丙稍重要(1:3),校正后反而丙比甲稍重要(1:1/2)。在 AHP 中,不同因素的权重比较来自于专家的经验,是进行定量分析的唯一基础,在上面的一致性校正中,明显地改变了不同因素的权重,无疑会使决策受到误导,说明纯粹从数学角度来进行一致性校正的方法在 AHP 计算中不完全适用。因此,寻找标度合理且判断矩阵快速满足一致性的方法是本文的目的。

3 构造 AHP 判断矩阵的差标度法

3.1 差标度法的思路

在萨蒂提出的 9 标度中,判断矩阵的元素值是人们通过因素之间的两两比较得出来的,从比较的过程中不难发现,在其它因素与第一个因素相比较的过程中,各个因素的相对重要程度已经“拉开档次”(本文后面提到的特殊情况除外),在其它因素的两两比较时,元素值的选取偏离第一行所确定的先后关系不会太大,元素的相对重要性应满足或基本满足偏好传递性(如当 $a_{1i} = 5, a_{1j} = 9, 2 \leq i < j$ 时,若 $a_{2i} = 3$, 则 a_{2j} 不能小于 4 和大于 6,否则会引起逻辑上的混乱)。一致性校正的时候也只能适当调整标度的值,而不能随意改变甚至颠倒主次关系。同时,还要正确理解标度的含义:标度是语义的量化,它主要用于表达因素的相对重要性,而不是数学上的倍数关系。大家知道,在多属性综合评价的过程中,因素(或称指标)的选取是一个复杂的过程,对于权重值很小的因素要剔除掉,所以不存在“极端不重要”的因素,那么各个因素相比较得出的标度不应该是成几十、几百倍的关系。基于以上观点提出“差标度法”。

“差标度法”是在决策者确定第 1 行的元素后,利用公式 $a_{ij} = f(a_{1i}, a_{1j})$ 按照偏好传递性确定其它行元素的值,该公式表示 2 个因素的相对重要程度与它们分别与第 1 个因素相比较得出来的值之间的差有关。

3.2 “差标度法”的公式及使用

定义 A 的第 1 行为基行, a_{11} 为基坐标,其值为 1, $a_{1i} (i=1, 2, \dots, n)$ 的值由专家或个人根据第 i 个元素与第 1 个元素的比较确定,其它任意 2 个元素的相对重要程度 a_{ij} 由它们分别与第 1 个因素相比较得出来的值 a_{1i} 和 a_{1j} 决定,即满足经验公式 $a_{ij} = f(a_{1i}, a_{1j})$, 按计算过程分为 2 步:①对 a_{1i}, a_{1j} 进行转化: $a'_{1i} = \begin{cases} a_{1i} & \text{当 } a_{1i} \geq 1; \\ l-1/a_{1i} & \text{当 } a_{1i} < 1; \end{cases}$ ②计算 $a_{ij}: a_{ij} = a_{ij}' \begin{cases} a'_{1j} - a'_{1i} + \alpha & \text{当 } a'_{1j} - a'_{1i} \geq 0; \\ -1/(a'_{1j} - a'_{1i} - \alpha) & \text{当 } a'_{1j} - a'_{1i} < 0; \end{cases}$ α 为权变值,由人的偏好决定,本文建议取值为 1 或 2。

3.3 证明

用 C 语言编程按 9 标度随机产生基行元素 $a_{1i} (i=1, 2, \dots, n)$, 由公式 $a_{ij} = f(a_{1i}, a_{1j})$ 确定其余各行元素值,计算 CR 并判断结果。共试验了 3 至 20 阶判断矩阵,每类矩阵经过 500 次循环,皆满足一致性(不包括后面的特殊情况),说明“差标度法”的实用性和准确性。

4 应用

某人决定买车,考虑的因素有: { 机能性, 费用, 安全性, 舒适感, 容纳人数, 驾驶方便, 售后服务 }, 试用层次分析法进行辅助选型,买主先确定基行为 $[1 \quad \frac{1}{7} \quad 3 \quad \frac{1}{3} \quad 5 \quad 1 \quad 7]$ 。分别计算如下:

1)按9标度法构造判断矩阵A并计算

算出 $CR = 0.1277 > 0.1$,按9标度法进行校正,结果是10次校正,10次判断矩阵不满足一致性,于是放弃常规方法,转用“差标度法”。

2)按差标度法构造判断矩阵B并计算

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 3 & 1/3 & 5 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 8 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 1/3 & 1/8 & 1 & 1/9 & 3 & 1/3 & 9 \\ 3 & 1/5 & 9 & 1 & 9 & 3 & 9 \\ 1/5 & 1/8 & 1/3 & 1/9 & 1 & 1/5 & 3 \\ 1 & 1/7 & 3 & 1/3 & 5 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/9 & 1/5 & 1/9 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \quad B: \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 3 & 1/3 & 5 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & 11 & 5 & 13 & 7 & 15 \\ 1/3 & 1/11 & 1 & 1/7 & 3 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1/5 & 7 & 1 & 9 & 3 & 11 \\ 1/5 & 1/13 & 1/3 & 1/9 & 1 & 1/5 & 3 \\ 1 & 1/7 & 3 & 1/3 & 5 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/9 & 1/5 & 1/9 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

算出 $CR = 0.0776154 < 0.1$,一次满足一致性。

由此可见,构造AHP判断矩阵的差标度法具有方便灵活、高效准确的特点,但需要注意的是对于一些特殊问题(如几个因素与 a_{11} 比较都是“极端重要”或“极端不重要”,而这几个因素之间的相对重要程度又不一样),本文的方法不适用,读者可以试着改变权变值 α 或者调整基坐标 a_{11} 对应的因素,这个因素与其它因素比较应处于“极端不重要”与“极端重要”之间,这样本文的方法就有了通用性。

5 结论

“差标度法”构造的判断矩阵在不违背人的主观偏好的前提下一次满足一致性,使层次分析法的应用更加简单,极大地方便了决策者。当然,采用“差标度法”确定判断矩阵较元素两两比较确定判断矩阵而言,有一点不足就是丢失了一些有用信息。因此,该方法主要用于判断矩阵难于一致,或一致性校正后违背专家偏好的情况下。

参考文献:

- [1] 李书涛. 决策支持系统原理与技术[M]. 北京:北京理工大学出版社,1996.
- [2] Saaty T L. 层次分析法[M]. 许树柏. 北京:煤炭出版社,1988.
- [3] 汪浩,马达. 层次分析标度评价与新标度方法[J]. 系统工程理论和实践,1993,13(5):24-26.
- [4] 侯岳衡,沈德家. 指数标度及其与几种标度的比较[J]. 系统工程理论和实践,1995,15(10):43-46.
- [5] 何方. 层次分析法的标度研究[J]. 系统工程理论和实践,1997,17(6):58-61.
- [6] 邱莞华. 群组决策特征根法[J]. 应用数学和力学,1997,18(11):1027-1031.
- [7] 杨萍. 关于AHP中判断矩阵校正方法的新探索[J]. 工科数学,2001,17(4):58-61.
- [8] 许金余,赵靖,曹定国,等. 防空阵地防护等级模糊综合评判[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2001,2(5):86-90.

(编辑:田新华)

Dispersion Method of Deciding AHP Comparison Matrix

LI Ling-peng, GUO Nai-lin, REN Ji-ye

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: Considering personal and incorporation's AHP - decision without capacity to carry out multi - experts' decision, the article presents "dispersion method" of deciding scale and comparison matrix in a rational way, which breaks through the traditional scale - research mode of pursuing pure math consistency and extends Saaty 9 scale standard flexibly, so the comparison matrix constituted by using this method can satisfy the consistency directly in compliance with decision - maker's own will.

Key words: AHP scale; comparison matrix; consistency