第 5 卷第 1 期 空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版) Vol. 5 No. 1
2004 年 2 月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Feb. 2004

欧氏空间 R^n 中求一类容积问题的矩阵分析方法

罗石麟， 唐晓兵， 张小水
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要:由组合拓扑学可知,任意凸多面体均为若干个单纯形的某种组合,两者均为规划论中最重要的基本概念之一,因而在一些计算中对其求积是不可少的。对此,本文提出一个基于矩阵分析的容积计算方法,并举例说明该方法可用于求解欧氏空间中一类容积问题。

关键词:单纯形;凸多面体;欧氏空间;矩阵分析方法;容积问题
中图分类号:O22 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2004)01-0089-03

解线性规划(LP)问题著名的 Khachian 算法的收敛性研究中,涉及到单纯形求积[1]。由于单纯形的基本重要性,这一求积在许多场合是必须的。对此,本文提出一个简单的求积方法,同时指出,该方法可用于求解欧氏空间中一类容积问题,因而具有一定的意义。

1 求一类容积问题的矩阵分析方法

定义 1 欧氏空间 R^n 中的一个 n 维单纯形是 R^n 中 $n+1$ 个线性无关顶点的凸包:

$$\Delta = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i, x_i \in R^n, \quad i = 1,2,\cdots,n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \forall \alpha_i \geqslant 0\}$$

定义 2 设 $n \times n$ 矩阵 Q 非奇异,$t \in R^n$,则称变换 $T(x) = t + Qx, \forall x \in R^n$ 为 $R^n \to R^n$ 的一个仿射变换。

引理 1 设子集 $S \subseteq R^n$ 在 Riemann 意义下的体积为 $V(S)$,则经仿射变换所得的集 $T(S)$ 的体积为 $V(S)|\det Q|$。

证明:在任意单值连续变换 $y=f(x)$ 的作用下,其中 $f: D_1 \to D_2, x, y \in R^n; D_1, D_2 \subseteq R^n$ 有体积,D_1 与 D_2 的体积之比为 $\frac{V(D_1)}{V(D_2)} = |J|$,其中 J 为 f 的雅可比行列式,称之为 $V(D_1)$ 变换到 $V(D_2)$ 变化的延伸系数[2]。

由于 $T(x) = t + Qx$,故 $|J| = |\det \frac{\partial Tx}{\partial x}| = |\det Q|$,代入便得。

引理 2[2] 特殊单纯形 $\Delta_n^{(0)}: x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1$ 的体积为 $V(\Delta_n^{(0)}) = \frac{1}{n!}$。

为求任意单纯形 $\Delta_n \in R^n$ 的体积,先引入如下仿射变换 $\Delta_n^{(0)} \to \Delta_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (v_j^{(i)} - v_j^{(0)}) \xi_i = x_j - v_j^{(0)}, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

其中 $v_i = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \cdots, v_n^{(i)})^T \in R^n, i = 0,1,2,\cdots,n$。上式系数矩阵 $Q = (v_j^{(i)} - v_j^{(0)})_{n\times n}, i = 1,2,\cdots,n+1, j = 1,2,\cdots,n$ 显然

$$\det Q = \det\begin{bmatrix} v_1^{(1)} - v_1^{(0)} & v_1^{(2)} - v_1^{(0)} & \cdots & v_1^{(n)} - v_1^{(0)} \\ v_2^{(1)} - v_2^{(0)} & v_2^{(2)} - v_2^{(0)} & \cdots & v_2^{(n)} - v_2^{(0)} \\ & & \cdot & \vdots \\ v_n^{(1)} - v_n^{(0)} & v_n^{(2)} - v_n^{(0)} & \cdots & v_n^{(n)} - v_n^{(0)} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \cdots & v_1^{(n)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{bmatrix} -$$

收稿日期:2002-11-26
作者简介:罗石麟(1939-),湖南长沙人,教授,主要从事防空运筹学研究.

$$\det\begin{bmatrix} v_1^{(0)} & v_1^{(2)} & \cdots & v_1^{(n)} \\ v_2^{(0)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_2^{(n)} \\ & & & \vdots \\ v_n^{(0)} & v_n^{(2)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{bmatrix} + \cdots (-1)^n \det\begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \cdots & v_1^{(0)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_2^{(0)} \\ & & & \vdots \\ v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_1^{(0)} & v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \cdots & v_1^{(n)} \\ v_2^{(0)} & v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \cdots & v_2^{(n)} \\ & & & \cdot & \vdots \\ v_n^{(0)} & v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \cdots & v_n^{(n)} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$$

由引理1知，$\dfrac{V(\Delta_n)}{V(\Delta_n^{(0)})} = \left|\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}\right|$。

著名数学家 L. Lovaśz 在估计椭球算法的迭代精度时[4]，就是用的这一单纯形体积公式。另外，在线性规划中，可行域一般为(有限)超多面体，而多面体可以用组合拓扑学的方法剖分为若干(有限)单纯形。显然，任意超多面体的体积(在需要估算某些值时)也是可求的。又由引理2，可得：

定理 若顶点 $\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\cdots$。$\boldsymbol{v}_n \in \mathrm{R}^n$ 线性无关，则由这 $n+1$ 个顶点构成单纯形的体积为

$$V = \frac{1}{n!}\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}\right|$$

上述方法表明，若 $V_0 \subseteq \mathrm{R}^n$ 已知或容易计算，$\forall V_1 \subseteq \mathrm{R}^n$，若可以从 V_0 由仿射变换 $T(x)$ 得到 V_1，则 V_1 的体积(记为 $\| V_1 \|$)为：$\| V_1 \| = |\det \dfrac{\partial T(x)}{\partial x}| \, \| V_1 \|$。

2 应用举例

2.1 超椭球的体积

超椭球 $\Psi(R) \subseteq \mathrm{R}^n$，$R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$ 为半径向量，则其体积 $V(\Psi)$ 为

$$V(\Psi) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R_1 R_2 \cdots R_n$$

这是因为单位超球 $\Phi \subseteq \mathrm{R}^n$ 的体积为 $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$，而 $\Phi \to \Psi$ 的仿射变换矩阵为 $\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(R_1,R_2,\cdots,R_n)$。

2.2 Klee - Minty 斜方体体积

V. Klee 和 G. J. Minty 在证明线性规划单纯形解法不是好算法时[3]，构造了一个 n 维斜方体如下：

$$(D)\begin{cases} 1 \geqslant x_1 \geqslant \varepsilon \\ 1-\varepsilon x_{i-1} \geqslant x_1 \geqslant \varepsilon x_{i-1}, \quad i=2,3,\cdots,n \\ 0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

显然，当 $\varepsilon \to 0$ 时，(D) 变为 n 维单位正方体。当 Klee - Minty 在 (D) 上求解线性规划问题：

$$(\mathrm{LP})\begin{cases} \min(-x_n) \\ x_1 - r_1 = \varepsilon \\ x_1 + s_1 = 1 \\ x_i - \varepsilon x_{i-1} - r_i = 0 \\ x_i + \varepsilon x_{i-1} + s_i = 1, \quad i=2,3,\cdots,n \\ x_i, r_i, s_i \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

时，表明了采用单纯形法其迭代步数必须用 2^n-1 步，所以它是“坏算法”，至少对这类问题是难解的。

现在求(D)的体积,注意到由单位正方体变为(D)的仿射变换为

$$(T).\begin{cases} y_1 = x_1 + \varepsilon \\ y_2 = (1-\varepsilon)x_2 + \varepsilon^2 \\ y_3 = (1-\varepsilon+\varepsilon^2)x_3 + \varepsilon^3 \\ \cdots\cdots \\ y_n = (1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\cdots+(-1)^{n-1}\varepsilon^{n-1})x_n + \varepsilon^n \end{cases}$$

或(T) $Y = b + TX$ 。其中

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$
$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$
$$b = (\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon x^n)^T$$
$$0 \leqslant x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant 1$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (1-\varepsilon) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & [1+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\varepsilon^{i-1}] \end{pmatrix}$$

故易知(D) 的体积为: $\prod_{d=2}^{n}[1+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\varepsilon^{i-1}]$

以上两个例子,表明了本文矩阵分析方法求体积的有效性和简单性。

参考文献:

[1] Aspvall B ,Stone R E. Khachian's Linear Programming Algorithm[J]. Journal of Algorithms, 1980,1(1):1 -7.

[2] 菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程[M]. 吴亲仁,路可见. 北京:人民教育出版社,1957.

[3] Klee V , Minty G J. How Good is the Simplex Algorithm[M]. New York: Academic Press Inc. , 1972.

[4] Grotschel M,Lovasz L,Scherijver A. The Ellipsoid Method and its Consequences in Combinational Optimization[R]. in Report 80 - 151 - OR, Univ. of Bonn, 1980.

(编辑:田新华)

Matrix Analysis Method for Some Volume Problems in Euclidean Space Rn

LUO Shi - lin, TANG Xiao - bing, ZHANG Xiao - shui

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: According to the viewpoint of combination tope, any convex polyhedron can be composed of some simplexes , and both convex polyhedron and simplex are important concepts of programming theory, so it's necessary to find their volumes in some calculations. Aiming at this problem, a method for volume calculation based on matrix analysis is presented in this paper, and some examples are given to show that this method can be used to solve a class of volume problems in Euclidean space.

Key words: simplex; convex polyhedron; Euclidean space; matrix analysis; volume problem