

# 基于 Viterbi 算法计算 TCM 码欧氏自由距离的有效方法

石峰, 杜兴民

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:**提出了计算格形编码欧氏自由距离的一种有效算法,该算法是依据 Viterbi 算法,取全零路径为参考路径进行计算,求得准规则码的欧氏自由距离,它适用于搜索高斯信道中的 TCM 好码。

**关键词:**Viterbi 算法;格形编码调制;欧氏自由距离

**中图分类号:**TN928 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2003)05-0049-04

格形编码调制技术(TCM)是一种高效的编码方法,它将调制与编码有机地结合在一起,利用信号集扩展提供编码冗余度,通过信号集分割映射使信号序列获得最大欧氏自由距离,并采用软判决 Viterbi 译码完成信息序列的恢复。与常规数字通信系统相比,它可以在不扩展频带并且不降低信息传输速率的情况下,对加性高斯白噪声获得 3~6 dB 的编码增益<sup>[1-2]</sup>,从而实现信息传输有效性和可靠性的有机统一。因此对于带限信道(如话音信道和卫星信道)上高速数字传输系统具有很高的应用价值和很大的发展潜力。

高斯信道中 TCM 码的性能主要与欧氏自由距离  $d_{free}$  有关。在进行高斯信道的 TCM 好码设计、构造以及性能分析时,都需要计算欧氏自由距离  $d_{free}$ ,尤其是对具有较大限制长度或较大点数信号星座的 TCM 码来说,有效的计算方法具有重要意义。

## 1 Viterbi(VB)译码算法基本原理

Viterbi(VB)译码算法是 1967 年 Viterbi 提出的一种最大似然译码方法,是卷积码的一种重要译码方法,后来小村(Omura)证明 VB 算法等价于求通过一个加权图的最短路径问题的动态规划解。

设对应于编码器输出序列的接收序列为  $r = \{r_1, r_2, \dots, r_L\}$ ,则卷积码最大似然译码的基本方法是寻找一条路径  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_L\}$ ,使似然值(概率) $p(r/c)$  或对数似然值  $\lg p(r/c)$  最大。这里定义判决变量

$$\Gamma(r, c) = \lg p(r/c) \quad (1)$$

对于转移概率为  $p < 1/2$  的无记忆二元双向对称信道(BSC),可推得其最大似然译码的判决变量为<sup>[3-4]</sup>

$$\Gamma(r, c) = \lg \left[ \prod_{m=1}^L p(r_m/c_m) \right] = \sum_{m=1}^L \lg [p(r_m/c_m)] = d(r, c) \lg \frac{p}{1-p} + L \lg(1-p) \quad (2)$$

式中: $d(r, c)$  为接收序列  $r$  与可能的码序列  $c$  相比对应位不相等的位数,即它们之间的汉明距离。由  $p < 1/2$  的假设可知,  $\lg [p/(1-p)]$  和  $\lg(1-p)$  均为负值,所以极大化  $\Gamma(r, c)$  等价于极小化  $d(r, c)$ ,即最大似然译码过程等价于最小汉明距离译码过程。

对于 BSC 信道,VB 译码是在信号经过相关检测、判决成二进制序列后进行的,通常称这类译码器为硬判决 VB 译码器,译码器中信号之间的差别用汉明距离来表示;为了充分利用信道输出信号的信息,提高译码可靠性,往往把信道输出的信号先进行  $Q > 2$  电平量化,然后输入到 VB 译码器译码。能适应于这种  $Q$  进制输入的 VB 译码器称为软判决 VB 译码器,即适应于 DMC 信道的译码器,此时译码器中信号之间的差别用

收稿日期:2002-11-11

作者简介:石峰(1976-),男,河南南阳人,讲师,硕士,主要从事通信与信息系统研究;  
杜兴民(1941-),男,安徽涡阳人,教授,主要从事通信与信息系统研究。

欧氏距离来表示。软判决比硬判决能得到更多的好处,但实现难度增加。对于 TCM 码,接收端采用软判决 VB 译码。

一般地,假设噪声对每个符号的影响是独立的,并且噪声是均值为 0、方差为  $\sigma^2 = n_0/2$  的高斯过程,此时最大似然译码的判决变量为<sup>[3]</sup>

$$\Gamma(r, c) = \lg[p(r/c)] = \lg\left\{ \prod_{m=1}^L \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi n_0}} \right] e^{-(r_m - c_m)^2/n_0} + \lg\left[ \frac{1}{\sqrt{\pi n_0}} \right]^L \right\} \quad (3)$$

若使上式取最大值,则应使下式为最小。

$$d^2 = \sum_{m=1}^L (r_m - c_m)^2 \quad (4)$$

式(4)为接收序列与可能的码序列之间的欧氏距离。此时极大化  $\Gamma(r, c)$  等价于极小化  $d^2$ ,即最大似然译码过程等价于最小欧氏距离译码过程。

我们把汉明距离或欧氏距离统称为距离,并在 VB 译码时将其作为状态转移图中相应分支或路径的度量。VB 译码的准则就是,比较接收序列与可能的码序列之间的距离,取与接收序列具有最小距离的码序列作为判决序列,在相应的状态转移格状图上,这一码序列称为具有最短路径。译码操作的基本过程是“加 - 比 - 选”,即计算汇聚到每个节点上的所有路径的距离,然后两两进行比较,并把具有最小距离的路径保存下来。当出现两条路径的距离累加值相等的情形时,可以任意选择其中一条作为“幸存”路径。

## 2 TCM 码欧氏自由距离的计算思想

图 1 为格形编码结构示意图。TCM 信号编码过程如下:在每一个编码调制间隔内,  $m$  比特待传输信息送到编码器,其中  $\bar{m}$  比特通过码率  $R = \bar{m}/(\bar{m} + 1)$  的二进制卷积编码器生成  $(\bar{m} + 1)$  比特,用于选择  $2^{(\bar{m} + 1)}$  个调制信号子集中的一个,再由其余  $m - \bar{m}$  个未编码比特在选定的子集中确定  $2^{(m - \bar{m})}$  个信号中的一个作为最终输出。这样,两步映射把  $m$  比特信息用带有冗余度的信号传输出去。

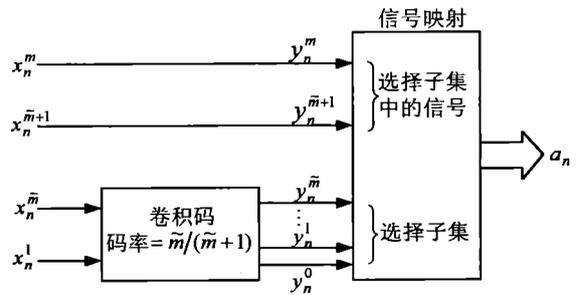


图 1 TCM 格形编码结构示意图

TCM 码的欧氏自由距离  $d_{free}$  定义为<sup>[1]</sup>

$$d_{free} = \min_{|a_n| \neq |a'_n|} \left[ \sum_n d^2(a_n, a'_n) \right]^{1/2} \quad (5)$$

式中:  $d^2(a_n, a'_n)$  为信号  $a_n$  和  $a'_n$  在欧氏空间上的距离。

再来考虑规则性问题。若一个网格码称为是规则的,当且仅当任意两个码字之间的欧氏距离只由其对应的码元序列的汉明距离所决定。规则性使码字间的距离计算简单化。实践中,规则码的自由距离可通过假设任意的参考路径(如全零路径)求得,因而计算的复杂性大为下降。通常计算一个具有  $2^v$  个状态非规则码自由距离的复杂程度,等效于计算一个具有  $2^{2v}$  个状态规则码的自由距离<sup>[5]</sup>。图 1 所示编码器是线性的,要使 TCM 码为规则码的充要条件是映射也是规则的,即任意两个信号之间的距离仅由它们选择符的汉明距离所决定,然而遗憾的是,现实中应用的各种调制信号集合基本上都是非规则的<sup>[6]</sup>。Ungerboeck 首先发现了对于一些非规则码的自由距离能通过假定一定的参考路径(如全零路径)来计算。解决的办法是,取选择符误差为  $e$  的任意两个信号之间的距离<sup>[1-2]</sup>

$$d(e) = \Delta q(e) \quad (6)$$

$q(e)$  是  $e$  中从最低位算起连续为 0 的个数。我们在本文中取

$$d(e) = \min_{u \in U} d(u, u \oplus e) \quad (7)$$

式中:  $d(u, v)$  是选择符分别为  $u$  和  $v$  两个信号之间的距离,  $U$  是所有信号选择符的集合。对于 MPSK 等情况,  $d(e)$  比  $d'(e)$  更接近实际值<sup>[5]</sup>。

文献[6]指出,准规则类 TCM 码的距离谱可以取全零路径为参考路径,所以其欧氏自由距离亦可取全零路径为参考路径进行计算。再由卷积码信号网格图的“无后效性”和“移不变性”特点(网格图可参考文献[7]图 12~35(c)),即不同的分支对应不同的状态转移,状态转移仅与编码器当前状态和当前输入信号有关,与时间无关,且与此状态前的编码器状态及输入无关。这正符合动态规划方法的前提<sup>[8]</sup>,也是可以用 VB 算法求解最短路径的依据。故计算传统 Ungerboeck 码及准规则类码的欧氏自由距离可转化为以全零路径为参考路径,以式(7)计算出的距离的平方作为状态转移图中相应转移分支的分支度量,用 VB 译码算法求解始于零状态止于零状态的最短非零路径,其路径度量(即各分支度量值之和)即为 TCM 码欧氏自由距离的平方。

### 3 TCM 码欧氏自由距离的计算方法

该算法是通过 VB 译码算法中更新路径度量矩阵来实现的。路径度量矩阵  $D^{(n)}$  的维数为  $S \times 2$  ( $S$  为 TCM 码的状态数目),其第一列元素  $\gamma_{i,n}$  为时刻  $nT$  到达  $S_i$  状态的所有路径中的最小路径度量值;第二列元素  $\gamma_{i,n-1}$  表示时刻  $(n-1)T$  到达  $S_i$  状态的所有路径中的最小路径度量值,用于计算时进行比较。以文献[7]图 12-37 所示的 8PSK-TCM 码编码器( $v=3$  时)为例进行说明。具体步骤为:

1) 结合所采用调制方式(8PSK)及状态转移图(可参考文献[7]图 12~35(c)),根据式(7),计算出各分支度量值,并按一定要求放入距离数组中,并初始化路径度量矩阵  $D^{(n)}$  为零矩阵( $D^{(n)}$  为  $8 \times 2$  矩阵)。

2) 起始状态路径如图 2(a)所示。计算从零状态出发,  $T$  时刻( $n=1$ )到达非零状态的  $2^k-1 (=3)$  个转移分支的分支度量(可从距离数组中得到),并作为该时刻对应状态的路径度量值  $\gamma_{i,1} (i=1,2,3)$ 。

3) 根据  $nT$  时刻的路径度量矩阵  $D^{(n)} (n \geq 1)$ ,计算  $(n+1)T$  时刻的路径度量矩阵  $D^{(n+1)}$ 。若编码器的输入比特是  $k=2$ ,则离开某一状态的转移共有  $2^k=4$  个;到达各状态的转移分支个数则视时刻而定,因为起始若干个时刻要排除由零状态发出的转移分支,如图 2(b)所示。

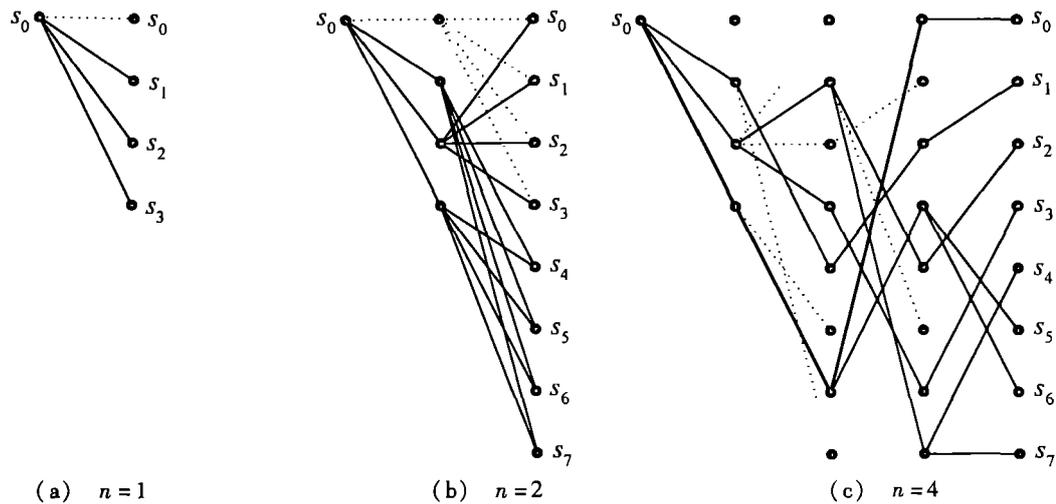


图 2 计算过程示意图

当前状态  $S_j$  在下一时刻  $(n+1)T$  到达状态  $S_i$  的分支度量记为  $\lambda_{ij,n}$ ,计算  $(n+1)T$  时刻可以到达的各状态上所有路径的度量累积值,存储各个状态上所有路径中的度量累积值的最小值作为该状态的路径度量值及相应的路径作为该状态的幸存路径,即

$$\begin{cases} \gamma_{0,k+1} = \min(c_{00,k}(\lambda_{00,k} + \gamma_{0,k}); c_{02,k}(\lambda_{02,k} + \gamma_{2,k}); c_{04,k}(\lambda_{04,k} + \gamma_{4,k}); c_{06,k}(\lambda_{06,k} + \gamma_{6,k})) \\ \gamma_{1,k+1} = \min(c_{10,k}(\lambda_{10,k} + \gamma_{0,k}); c_{12,k}(\lambda_{12,k} + \gamma_{2,k}); c_{14,k}(\lambda_{14,k} + \gamma_{4,k}); c_{16,k}(\lambda_{16,k} + \gamma_{6,k})) \\ \vdots \\ \gamma_{7,k+1} = \min(c_{71,k}(\lambda_{71,k} + \gamma_{1,k}); c_{73,k}(\lambda_{73,k} + \gamma_{3,k}); c_{75,k}(\lambda_{75,k} + \gamma_{5,k}); c_{77,k}(\lambda_{77,k} + \gamma_{7,k})) \end{cases}$$

式中:系数  $C_{ij,n}$  取值为 0 或 1,表示  $(n+1)T$  时刻到达  $S_i$  状态的分支中是否有来自前一时间状态  $S_j$  的转移。

首次出现非零状态到零状态的转移分支之后,即开始对与零状态有关的所有转移分支进行度量计算并

保存、更新幸存路径。

4) 设所有状态首次能全部到达的时刻为  $M(M=2)$ , 根据网格图的“移不变性”, 一般选取  $n = M + 2$ , 计算  $nT$  时刻到达零状态的路径度量值, 即为所要求的欧氏自由距离的平方, 即  $d_{\text{free}}^2 = \gamma_{0,n}$ 。对于本例的 8PSK - TCM 码,  $n=4$  计算情况如图 2(c) 所示, 结果为  $d_{\text{free}}^2 = 4.5858$ ;  $d_{\text{free}} = 2.141$ ;  $d_{\text{free}}^2 / \Delta_{c1}^2 = 2.239$ 。式中  $\Delta_{c1}$  表示对信号空间进行子集划分时第一级子集中信号点之间的最小距离。此结果与文献[1]一致。 $n = M + 1 = 3$  时, 已有  $d_{\text{free}}^2 = \gamma_{0,n}$  (即有  $\lambda_{00,3}$ )。最短路径如图 2(c) 中粗线所示。计算时之所以取  $n = M + 2$ , 是为了保证到达零状态的所有路径情况都予以考虑。

由以上步骤可以看出, 本算法将对规则码欧氏自由距离的计算可以取全零路径为参考路径的情况推广到准规则类码, 由于可以取全零路径为参考路径, 计算过程中所用的度量矩阵的维数由  $S \times S$  ( $S$  为 TCM 码的状态数目) 降为  $S \times 2$ , 从而大大地减少了计算量。

## 4 结束语

本文将规则码欧氏自由距离的计算可以取全零路径为参考路径的情况予以推广, 提出依据 VB 算法对 TCM 码欧氏自由距离进行计算的一种有效算法, 所介绍方法已经在计算机上实现, 对于 Ungerboeck 码及准规则类码的欧氏自由距离计算非常有效。此外, 它还适用于高斯信道中 TCM 好码的计算机搜索。

### 参考文献:

- [1] Ungerboeck G. Channel coding with multilevel/phase signals[J]. IEEE Trans Information Theory, 1982, 28(1): 55 - 67.
- [2] Ungerboeck G. Trellis coded modulation with redundant signal sets - part I: introduction and part II: state of the art[J]. IEEE Commun Mag, 1987, 25(2): 5 - 21.
- [3] 王 匡, 姚庆栋. 格状编码调制的维特比译码算法[J]. 广播与电视技术, 1996, 23(1): 60 - 66.
- [4] 陈 运, 周 亮, 陈 新. 信息论与编码[M]. 北京: 电子工业出版社, 2002.
- [5] 金子建, 朱雪龙. 一种实现高性能 TCM 的卷积码编码器结构[J]. 电子学报, 1992, 20(7): 51 - 58.
- [6] Rouanne M, Costello D J, An algorithm for computing the distance spectrum of trellis codes[J]. IEEE J, 1989, SAC - 7(6): 929 - 940.
- [7] 曹志刚, 钱亚生. 现代通信原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992.
- [8] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.
- [9] 杜兴民, 蒋旭宇. 网格编码调制在数字通信中的应用[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2003, 4(1): 43 - 45.

(编辑: 姚树峰)

## An Efficient Algorithm for Computing the Euclidean Free Distance of TCM Codes Based on the Viterbi Algorithm

SHI Feng, DU Xing - min

( The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi, 710038, China )

**Abstract:** An efficient algorithm for computing the Euclidean free distance of TCM codes is described. The algorithm, based on the Viterbi algorithm, is taken in computing the Euclidean free distance of norm codes by assuming the all - zero information sequence to be a reference route. The Algorithm is applied to searching for good TCM codes on Gauss Channels.

**Key words:** Viterbi algorithm; trellis coded modulation; Euclidean free distance